Matemática Discreta

Universidade de Aveiro

Tiago Garcia

Matemática Discreta

Universidade de Aveiro

Tiago Garcia
tiago.rgarcia@ua.pt

16 de março de 2023

Consequências Semânticas

Teorema

Uma fórmula Ψ é consequência lógica (ou semântica) das fórmulas $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ se e só se $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \Psi$ é uma tautologia (fórmula válida).

Notação

$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \Psi$
Ψ é consequência lógica (ou semântica) de $\psi_1, \ldots, \psi_n$

$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \Psi$ existe uma prova de Ψ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_n$
A prova recorre a regras de dedução designadas por regras de inferência, e a tautologias conhecidas.

Teorema

$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \Psi$
(Ψ é consequncia lógica de $\psi_1, \ldots, \psi_n$) se e só se o conjunto $\psi_1, \ldots, \psi_n, \neg\Psi$ é inconsistente, isto é, não existe uma interpretação para a qual todas as fórmulas do conjunto tomam valor 1.

Para verificar se este conjunto de fórmulas é inconsistente usamos uma nova regra designada por resolução:

$\frac{\psi \rightarrow \theta \quad \Psi \vee \psi}{\theta \vee \psi} res$
Indicam que aplicámos a regra/método da resolução.

Casos particulares

1. Se $\theta \equiv \perp$ obtemos
   $\frac{\Psi \rightarrow \perp \quad \Psi \vee \psi}{\perp \vee \psi}$

simplificando como: $\perp \vee \psi \equiv \psi \quad \text{e} \quad \Psi \rightarrow \perp \equiv \Psi \vee \perp \equiv \Psi$

Para este caso particular a regra da resolução é:
$\frac{\neg\Psi \quad \Psi\vee\psi}{\psi} res \quad \rightarrow \neg\Psi, \Psi$ são lineares complementares.

2. Se $\theta \equiv \perp \quad e \quad \psi \equiv \perp$ (este é um caso particular do caso 1.)

   Se $\psi \equiv \perp$ então $\Psi \vee \psi \equiv \Psi \vee \perp \equiv \Psi$
   Substituindo no caso particular da regra de resolução obtida em 1. tem-se
   $\frac{\neg\Psi \quad \Psi}{\perp} res$

Lógica Proposicional

Definição

Simbolos

Variáveis proposicionais: $p, q, \Psi, \psi, \ldots$
Constantes: $\perp e \top$ Conetivos lógicos: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \equiv$

Regras de construção

1. Se ψ é uma fórmula proposicional então $\neg\neg\psi$ é uma fórmula proposicional.
2. Se ψ e θ são fórmulas proposicionais então $\psi \wedge \theta$ é uma fórmula proposicional.
3. Se ψ e θ são fórmulas proposicionais então $\psi \vee \theta$ é uma fórmula proposicional.
4. Se ψ e θ são fórmulas proposicionais então $\psi \rightarrow \theta$ é uma fórmula proposicional.
5. Se ψ e θ são fórmulas proposicionais então $\psi \leftrightarrow \theta$ é uma fórmula proposicional.

Dedução na lógica proposicional

- Verificar se uma fórmula é consequência lógica de um conjunto finito de fórmulas.
  $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \Psi$
- Vimos que a consequência lógica é válida se e só se a implicação
  $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \Psi$ é uma tautologia.

Para verificar se uma consequência lógica é válida:

1. Verificar se a implicação associada é uma tautologia.

2. Verificar se é possível obter (também são usados os termos deduzir, derivar, entre outros) Ψ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_n$, recorrendo a regras de inferência e tautologias conhecidas (propriedades dos conetivos lógicos).
   (através de uma sequência de deduções em que aplicamos as regras de inferências e tautologias), diz-se que existe uma prova de Ψ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_n$ e escreve-se $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \Psi$.

3. Aplicar a regra de resolução - Método de resolução.

Método de resolução

A consequência lógica $\psi_1, \ldots, \psi_n \models, \Psi$ é válida se e só se o conjunto de fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n, \neg\Psi$ é inconsistente, ou seja, este conjunto contém $\perp$ ou é possível deduzir $\perp$ a partir deste conjunto de fórmulas, isto é, existe uma prova de $\perp$ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_n, \neg\Psi$.

Lógica de 1ª ordem

Definição

Exemplo de uma fórmula da lógica proposicional:
$(p \wedge q) \rightarrow r$
Para traduzir frases do tipo:
i) todos os gatos têm garras.
ii) alguns alunos de MD têm 20.

Passamos da lógica proposicional para a lógica de 1ª ordem (esta última engloba a outra).

Linguagem da lógica de 1ª ordem

Alfabeto

1. Variáveis: x, y, z, ...;
2. Conetivos lógicos da lógica proposicional: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \equiv$;
3. Constantes da lógica proposicional: $\perp e \top$;
4. Os quantificadores $\forall$ e $\exists$;
5. O símbolo de igualdade: $=$;
6. Símbolos de constantes;
7. Símbolos de funções com aridade $n \in N$ (isto é, com n argumentos);
8. Símbolos de predicados.

Termo

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo;

2. Se f é símbolo de função com aridade n e $t_1, \ldots, t_n$ são termos então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

   Exemplo:

   - Variáveis: x, y, z;
   - Constantes: $a = 1$, $b =$ Maria, $c =$ Gato tareco;
   - Funções: pai(Maria), onde
     Pai: $P \rightarrow P$, onde P é o conjunto das pessoas.
   - Predicado: $par(x) =$ "x é par", $D = N$
     $par(2) = 1, \quad par(3) = 0$, etc.

   Como é que se constroem as fórmulas da lógica de 1.ª ordem?
   Definição (recursiva) de fórmula:

   - $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmla, considerando P um simbolo de predicado e $t_1, \ldots, t_n$ termos.
   - Se ψ e Ψ sao fórmulas então:
     $\psi \wedge \Psi$, $\psi \vee \Psi$, $\psi \rightarrow \Psi$, $\psi \leftrightarrow \Psi$, $\neg\psi$, $\perp$ e $\top$ são fórmulas.
   - Se ψ é uma fórmula e x é uma variável então $\forall x \psi$ e $\exists x \psi$ também são fórmulas.
   - Se t_1 e t_2 são termos então $t_1 = t_2$ é uma fórmula.

Átomo

Na lógica proposicional, os átomos são as proposições atómicas (ex: $p =$ "chove", $q =$ "vou à aula de MD")

Os átomos da lógica de 1ª ordem são:

1. $\perp, \top$

2. $t_1 = t_2$, com t_1 e t_2 termos

3. $P(t_1, \ldots, t_n)$, onde $t_1, \ldots, t_n$ são termos e P é um simbolo de predicado.

Exemplo

Consideremos os espaços vetoriais estudados na ALGA.
O alfabeto inclui:

- O símbolo de constante o que representa o elemento nulo dos espaço vetorial
- Símbolos de funções
  1. Para cada $\alpha \in R$, o símbolo de funções
     $\alpha \cdot \_$
     que tem aridade 1 correspondente à multiplicação escalar.
  2. O símbolo de função $+$ com aridade 2, que corresponde à adição de elementos do espaço vetorial.

Exemplos

Converta as seguintes afirmações para linguagem simbólica da lógica de 1ª ordem:

1. Todos os gatos têm garras.
   $\forall x\ [g(x) \to t(x)]$
   Universo: U = conjunto dos animais.
2. Alguns alunos de MD têm 20.
   $\exists x\ (MD(x) \wedge V(x))$
   MD(x) = "x é aluno de MD"
   V(x) = "x tem 20"Universo: U = alunos da UA em 22/23

Folha 1

Exercício 2.

c)

Todos os insetos são mais leves do que algum mamífero. $\forall$ $\exists$
Predicados:
$I(x)$ = “x é um inseto“
$L(y, z)$ = “y é mais leve do que z“
$M(w)$ = “w é um mamífero“

$\forall x\, (I(x) \to \exists y\, (M(y) \wedge L(x, y)))$

Obs: Alcance de cada quantificador:

- Ocorrência de x ligada: $I(x)$
- Alcance de $\forall x$: $(I(x) \to \exists y\,(M(y) \land L(x,y))$
- Ocorrências de y ligadas: $M(y)$ e $L(x,y)$
- Alcance de $\exists y$: $(M(y) \land L(x,y)$

Fórmula fechada

Definição

Fórmula que não tem variáveis com occorrências livres.

Exemplo

$\forall x\ \exists y\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x,y))$ é uma fórmula fechada.
$\exists y\ ((\forall x\ P(x))\ \wedge\ R(x,y))$, esta fórmula não é uma fórmula fechada.

Negação de fórmula com quantificadores

1. $\neg(\forall x\ \psi)\ \equiv\ \exists x\ \neg\psi$.
2. $\neg(\exists x\ \psi)\ \equiv\ \forall x\ \neg\psi$.

ψ - parte da fórmula que está sob o quantificador.

Introdução das fórmulas da lógica de 1ª ordem

Definição

- Estrututa;
- Valoração, V:$var\ \rightarrow\ D$, onde D é o conjunto das variáveis.

O conceito de valoração pode ser entendido por forma a podermos considerar a valoração de um termo.
$V(a) = a$, se a é uma constante $V(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^M(V(t_1), \ldots, V(t_n))$.
Obs: Frequentemente denotamos o símbolo de função f e a função correspondente na estrutura f^M, pela mesma letra.

Exemplo dos slides

$V(M(A,x)) = M^M(V(A),V(x)) = M(A^M,2) = M(1,2) = |1-2| = |-1| = 1, \qquad V(A) = A$ porque A é uma constante.

Interpretação de fórmulas

Exemplo de interpretação de fórmulas (ver slides)

i)

Mostre que $R(x,A)$ não é válida na interpretação (M,V)

Note-se que $\neg(M,V) \models R(x,A)$ se e só se $(M,V) \models \neg R(x,A)$ ($\neg R(x,A)$ é válida na interpretação (M,V))

$V(\neg R(x,A)) \equiv \neg R(V(x),V(A)) \equiv \neg R(2,A^M) \equiv \neg R(2,1)$
$\equiv \neg(2 < 1) \equiv \neg\bot \equiv \top$
Logo, $\neg R(x,A)$ é valida na interpretação (M,V), isto é, $(M,V) \models \neg R(x,A)$
Isto é equivalente a afirmar que $R(x,A)$ não é válida nesta interpretação.

Forma normal de Skolem

Definição

Uma fórmula ϕ é dita em forma normal de Skolem se ϕ é uma fórmula na forma normal conjuntiva e não contém nenhum quantificador universal.

Exemplo

1)

$\forall x \; P(x, f(x)) \wedge \neg R(x)$, onde f é uma função e R e P são predicados.

2)

$\forall x \; \forall y \; (P(x, f(x)) \wedge (\neg R(x) \; \vee \; P(x, y)))$

Ideia

1. Convertemos F numa fórmula G que está na FNC prenex.
   Note-se que $F \equiv G$
2. A partir de G obtemos uma fórmula H que está na forma normal de Skolem.

Para tal:

- Se no início da fórmula temos um quantificador do tipo $\exists x$, substituimos todas as ocorrências de x por um símbolo a que represente uma constante e eliminamos o quantificador $\equiv x$.

- Se na fórmula existe um quantificador existencial $\exists x_k$ com os quantificadores universais $\forall x_1\ \forall x_2\ \ldots\ \forall x_{k-1}$, à sua esquerda, substituimos todas as ocorrências de x_k por um símbolo de função que ainda não esteja na fórmula, por exemplo f, que tem nos seus argumentos as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, isto é, x_k é substituido por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$.
  Atenção: A fórmula H que obtemos na forma normal de Skolen pode não ser (logicamente) equivalente à fórmula G escrita na FNC prenex ou à fórmula F original.