Cálculo I – gr. 4 – 2016/17 – 2º teste-modelo

Resolução e comentários

1\. (i) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; $\int_4^6 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$

(a) No 1º caso trata-se de um integral de Riemann, pois em $[0,3]$ a função $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ é contínua (o domínio de definição desta expressão é $]-1,\infty[$, dando origem a uma função contínua aí). Usou-se o resultado que diz que função contínua num intervalo limitado e fechado é integrável nesse intervalo.

No 2º caso trata-se de um integral impróprio de 2ª espécie:

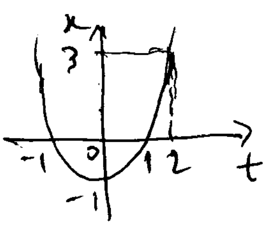
$$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \lor x=5.$$

Como $5\in[4,6]$ e $\lim_{x\to 5}\frac{1}{x^2-6x+5}=$

$=\lim_{x\to 5^{\mp}}\frac{1}{(x-1)(x-5)}=\mp\infty$, para além de não estar definida no ponto 5 do intervalo $[4,6]$, a função ~~também~~ se torna ilimitada junto a 5.

(b) Caso (i): Integramos por mudança de variável definida por $x+1=t^2$, $\Leftrightarrow x=t^2-1$:



x	t
0	1
3	2

Escolhendo $\varphi(t)=t^2-1$, $t\in[1,2]$, tem-se que $\varphi([1,2])=[0,3]$, onde $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ é contínua.

Além disso, $\varphi'(t) = 2t$ é também contínua.

Então $$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx \underset{\text{pois } t>0}{=} \int_1^2 \frac{t^2-1}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\,dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^2 = 2\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{7}{3} - 1\right) = \frac{8}{3}.$$

Caso (ii): De acordo com a definição (e com o estudo feito em (a)), o integral impróprio aqui em causa será convergente se e só se o mesmo acontecer a

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx \quad \text{e} \quad \int_5^6 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$$

ver alínea (a)

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx = \lim_{b\to 5^-} \int_4^b \frac{1}{(x-1)(x-5)}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to 5^-} \int_4^b \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-5}\,dx$$

$$= \lim_{b\to 5^-} \frac{1}{4}\Big[\ln|x-5| - \ln|x-1|\Big]_4^b$$

$$= \lim_{b\to 5^-} \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\ln\left|\frac{b-5}{b-1}\right|}_{\to -\infty} - \ln\left|\frac{-1}{3}\right|\Big)$$

$$= -\infty$$

C.A.:
$$\frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$$
$$\Rightarrow 1 = A(x-5) + B(x-1)$$
$$\Leftrightarrow 1 = Ax - 5A + Bx - B$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -5A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ -5A+A=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

∴ O integral dado diverge.

2. Ver a resolução da questão 1 do 2º teste de Cálculo II do ano letivo 2015/16 (aceder via recursos > Outros recursos em http://calculo.wikidot.com; procurar pela parte de Cálculo II, etc.)

3. Ver a resolução da questão 4 do 2.º teste de Cálculo I do ano lectivo 2015/16.

4. } As questões 4 e 5 têm a ver com resultados teóricos
5. } provados durante as aulas e com exercícios de aplicação da matéria dada que podem não ter sido exemplificados nas aulas. Pelo menos no que diz respeito à matéria sobre integrais, há vários exemplos em testes dos anos anteriores.

Mais comentários:

Atendendo à alteração do programa de Cálculo I, não encontrarão em testes dos anos anteriores questões exactamente como a questão 1 deste teste modelo. Informo, no entanto, que o 1.º integral aparece num exercício da secção 2.2 – parte 4 no Wikidot e o 2.º integral é inspirado num exercício da secção 2.3 – parte 1 no Wikidot. Questões como a 2 podem ser encontradas nos 2.º testes de Cálculo II (ver parte correspondente no NerCloud) dos anos lectivos anteriores. Questões como a 3 podem ser encontradas nos 2.º testes de Cálculo I dos anos lectivos anteriores.

Relativamente às questões a serem usadas em 4 e 5, para além do que se escreveu acima, no que diz respeito à matéria sobre séries poderão encontrar alguma coisa em http://calculo.wikidot.com/forum/t-1178675/3-t-p-c.

A. Castro
16-12-2016