Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Matrizes

1. Considere a matriz identidade I_2 e as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\1&0\\2&3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&2\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}.$$

Calcule

(a) $A+B$; (b) $D^\top-2A$; (c) AD; (d) DA; (e) ACD; (f) $\frac{1}{5}\left(I_2-(DA)^2\right)$;

(g) o produto das matrizes A, C, D e E, considerando estas matrizes ordenadas de forma adequada.

2. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

   (a) Se A e B são matrizes de ordem n, então $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.
   (b) Se A e B são matrizes de ordem n, então $(AB)^2=A^2B^2$.
   (c) Se A,B,C são matrizes tais que $A+C=B+C$, então $A=B$.
   (d) Se A,B,C são matrizes tais que $AB=AC$, então $A=O$ (matriz nula) ou $B=C$.
   (e) Se A é uma matriz de ordem n tal que $AA^T=O$, então $A=O$ (sendo O a matriz nula de ordem n).
   (f) Para $k\in\mathbb{N}_0$,

$$\begin{bmatrix}\mu_1&0&\cdots&0\\0&\mu_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\mu_n\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\mu_1^k&0&\cdots&0\\0&\mu_2^k&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\mu_n^k\end{bmatrix}.$$

3. Seja A uma matriz quadrada.

   (a) Mostre que $A+A^T$ é uma matriz simétrica.
   (b) Em que condições é que a matriz $A-A^T$ é simétrica?

4. Considere as seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&3&3\\0&0&1\end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix}3&4&5&0\\0&0&2&1\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&5\end{bmatrix};\qquad D=\begin{bmatrix}1&14&0&10\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

   (a) Indique as matrizes que estão na forma escalonada e as que estão na forma escalonada reduzida.
   (b) Determine matrizes equivalentes por linhas às matrizes dadas que estejam:
      i. na forma escalonada;
      ii. na forma escalonada reduzida.

Sistemas de equações lineares

5. Resolva os seguintes sistemas usando o método de eliminação de Gauss (ou o método de eliminação de Gauss-Jordan).

(a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

6. Para cada sistema, determine os valores de α para os quais o sistema

(a) $\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + (\alpha - 1)y + \alpha z = \alpha - 2 \\ (\alpha - 1)y = 1 \\ \alpha\, z = \alpha - 3 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x + \alpha y + \alpha z = 0 \\ \alpha x + y + z = 0 \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases}$.

i. não tem solução; ii. tem exatamente uma solução; iii. tem uma infinidade de soluções.

7. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y + z = a \\ x - by + z = -b \end{cases},$$

onde a e b são parâmetros reais.

(a) Determine os valores de a e b para os quais o sistema é:
i. possível e determinado; ii. possível e indeterminado; iii. impossível.

(b) Sabendo que $(1, -1, 1)$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

8. Considere a matriz A de dimensão 3×5, o vetor B de dimensão 3×1 e o sistema $AX = B$, onde X é o vetor das incógnitas. Sabendo que a característica de A é 3, determine a característica da matriz ampliada do sistema (matriz $[A|B]$) e a nulidade de A. Classifique o sistema.

9. Seja A uma matriz qualquer e B uma coluna de A. Mostre que o sistema $AX = B$ é possível e indique uma solução.

Posição relativa de retas e planos

10. Considere os sistemas dos exercícios 5-(c,d,e). Suponha que as duas primeiras equações de cada sistema são equações cartesianas de uma reta r e a terceira equação é uma equação geral de um plano $\mathcal{P}$. Em cada alínea, determine a posição relativa da reta r e do plano P e descreva a interseção de r e $\mathcal{P}$.

11. Considere os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ de equações $x + y + 2z = 3$ e $ax + 2y + 4z = b$, respectivamente, com $a, b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros reais a e b.

12. Considere que cada uma das seguintes matrizes é uma matriz obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss à matriz de um sistema formado por equações cartesianas que definem duas retas r e s:

$$\text{(a)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 15 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];\ \text{(b)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];\ \text{(c)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right];\ \text{(d)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Para cada matriz, indique qual é a posição relativa das retas r e s. Justifique.

13. Considere a reta r definida por $x = 2y + z = 1$ e a familia de retas $s_{a,b}$ de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + \alpha(0, 2, b),\quad \alpha \in \mathbb{R},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determine as equações cartesianas de $s_{a,b}$.

(b) Discuta a posição relativa das retas r e $s_{a,b}$, em função dos parâmetros a e b.

Matriz Inversa

14. Averigue se as seguintes matrizes são invertíveis (não singulares) e, em caso afirmativo, determine a respectiva inversa:

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix};\quad \text{(d)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

15. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $C = ADB$.

(b) Verifique que B é a matriz inversa de A.

(c) Calcule C^5, usando as alíneas anteriores.

(d) Resolva a equação matricial $AXD = B$, relativamente à matriz X.

16. Considere a matriz invertível $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que M satisfaz a equação $M^3 - 4M^2 - I_3 = 0$.

(b) Prove, sem calcular o seu valor, que $M^{-2} = M - 4I_3$.

(c) Calcule M^{-1} pela equação da alínea anterior e verifique o resultado obtido.

17. (a) Seja A uma matriz arbitrária $n \times n$. Suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = O$ (matriz nula $n \times n$). Mostre que $I_n - A$ é invertível e que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

(b) Usando a alínea anterior, calcule a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

resolva as seguintes equações matriciais relativamente à matriz X:

(a) $\left((B^{-1})^T X\right)^{-1} A^{-1} = I$;

(b) $\left(C^T D^T X\right)^T = E$.

19. Considere o sistema de equações lineares

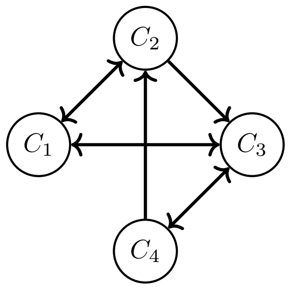
$$\begin{cases} y + 3z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}.$$

(a) Mostre que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível e calcule a sua inversa.

(b) Justifique que o sistema é possível e determinado. Calcule a sua solução recorrendo à inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

Algumas aplicações

20. Uma companhia aérea serve quatro cidades, C_1, C_2, C_3 e C_4, cujas ligações podem ser representadas por um *grafo orientado*:



- existem voos de C_1 para C_2 e C_3;
- existem voos de C_2 para C_1 e C_3;
- existem voos de C_3 para C_1 e C_4;
- existem voos de C_4 para C_2 e C_3.

(a) Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{4\times4}$, chamada a matriz de adjacência associada ao grafo, tal que

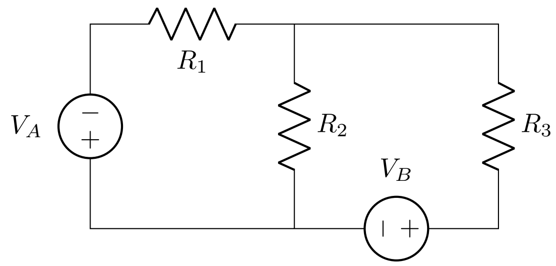
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe um voo de } C_i \text{ para } C_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) A matriz $A^r = [a_{ij}^{(r)}]$ (onde A^r é a matriz que resulta da multiplicação de r matrizes iguais a A) é tal que a entrada $a_{ij}^{(r)}$ representa o número de itinerários diferentes de ligação da cidade C_i à cidade C_j utilizando r voos. Determine quantos itinerários diferentes existem para irmos da cidade C_4 para a cidade C_1 utilizando:

i. apenas um voo; ii. dois voos; iii. três voos.

Para cada uma das alíneas anteriores, determine explicitamente todos os itinerários.

21. Considere o circuito eléctrico representado na figura seguinte:

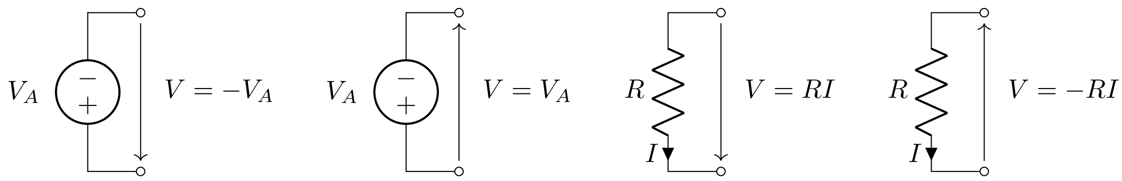


constituído por dois geradores de tensão $V_A = 7\,V$ e $V_B = 5\,V$ e três resistências $R_1 = 10\,k\Omega$, $R_2 = 5\,k\Omega$ e $R_3 = 15\,k\Omega$. Determine a intensidade das correntes que passam pelas três resistências.

Observação: Para resolver o exercício é preciso aplicar as **Leis de Kirchhoff**:

- **(lei dos nós)** a soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que dele saem (ou seja, um nó não acumula carga);
- **(lei das malhas)** a soma da diferença de potencial eléctrico ao longo de qualquer caminho fechado (malha) é nula.

A direção escolhida para percorrer a malha determina o cálculo das diferenças de potencial consoante as seguintes convenções:



- Num gerador de tensão, a diferença de potencial eléctrico medida do polo positivo para o polo negativo é positiva; caso contrário é negativa.
- Numa resistência R percorrida por uma corrente I, a diferença de potencial eléctrico, medida com o mesmo sentido que a corrente, é dada pela Lei de Ohm, isto é, $V = RI$; caso contrário, $V = -RI$.

Sugestão: comece por determinar um sistema de equações lineares que resulta da aplicação das leis de Kirchhoff e aplique o método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) ao sistema.

1. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$;
(g) $DACE = \begin{bmatrix} 5 \\ -41 \end{bmatrix}$ ou $CDAE = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}$.

2. (a) Falsa (b) Falsa (c) Verdadeira; (d) Falsa; (e) Verdadeira; (f) Verdadeira.

3. (b) Quando A é uma matriz simétrica e neste caso $A - A^\top = 0$ (matriz nula).

4. (a) Forma escalonada: B e D; forma escalonada reduzida: D.
(b) i. Forma escalonada: $A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
ii. Forma escalonada reduzida: $A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B_r = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

5. (a) $x_1 = -2$, $x_2 = -10$; (b) impossível; (c) $x_1 = -4$, $x_2 = -8$, $x_3 = 2$; (d) impossível; (e) $x_1 = t$, $x_2 = \frac{1}{3} - 2t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$; (f) $x_1 = \frac{3}{17}t_1 - \frac{13}{17}t_2$, $x_2 = \frac{19}{17}t_1 - \frac{20}{17}t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

6. (a) i. $\alpha = -1$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iii. $\alpha = 1$; (b) i. $\alpha \in \{0, 1\}$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; (c) i. $\alpha = 1$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iii. $\alpha = -1$.

7. (a) i. $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; ii. $a = 1$ e $b = -1$; iii. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $b = -1$. (b) $\{(1, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

8. Seja $n = 5$ o número de colunas de A. $car([A|B]) = 3$ e $nul(A) = n - car(A) = 2$. O sistema é possível e indeterminado porque $car(A) = car([A|B]) = 3 < n = 5$. O grau de indeterminação do sistema é igual a $nul(A) = 2$.

9. Se B é a coluna i de A, então $X = [0 \cdots 1 \cdots 0]^T$, com 1 na linha i e as restantes entradas nulas, é uma solução.

10. (c) A reta r e o plano $\mathcal{P}$ são concorrentes. Intersetam-se no ponto $(-4, -8, 2)$;
(d) A reta r e o plano $\mathcal{P}$ são paralelos. A interseção é o conjunto vazio.
(e) A reta r está contida no plano $\mathcal{P}$. A interseção é a $r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = t, \ x_2 = \frac{1}{3} - 2t, \ x_3 = t, \ t \in \mathbb{R}\}$, isto é, $r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{1}{3}, 0) + t(1, -2, 1), \ t \in \mathbb{R}\}$.

11. $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a = 2$ e $b = 6$; estritamente paralelos se $a = 2$ e $b \neq 6$; concorrentes se $a \neq 2$ e $b \in \mathbb{R}$.

12. (a) Retas concorrentes; (b) retas coincidentes; (c) retas enviesadas; (d) retas estritamente paralelas.

13. (a) Equações cartesianas de $s_{a,b}$: $x = a$, $by - 2z = -2$.
(b) As retas r e $s_{a,b}$ são coincidentes se $a = 1$ e $b = -4$; estritamente paralelas se $a \neq 1$ e $b = -4$; concorrentes se $a = 1$ e $b \neq -4$; enviesadas se $a \neq 1$ e $b \neq -4$.

14. (a) Matriz singular; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

15. (c) $C^5 = AD^5B = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}$; (d) $X = \begin{bmatrix} 32 & -9 \\ -\frac{45}{2} & \frac{19}{3} \end{bmatrix}$.

16. (c) $M^{-1} = MM^{-2} = M(M - 4I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

17. (a) $(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n - A^k = I_n$.
   (b) $M = I - A$ com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo $A^3 = O$. Logo, $M^{-1} = (I-A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. (a) $X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $X = \left(E(DC)^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

19. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $x = -1, y = -5, z = 2$.

20. (i) 0 itinerários; (ii) 2: $C_4 \to C_2 \to C_1$, $C_4 \to C_3 \to C_1$; (iii) 1: $C_4 \to C_2 \to C_3 \to C_1$.

21. $I_1 = 600\,\mu$A (esquerda–direita), $I_2 = 200\,\mu$A e $I_3 = 400\,\mu$A (cima–baixo).