Cálculo I – agr. 4 2020/21

1º teste – turma TP4 A-6

<u>Resolução</u>

1. $f(x) = \arctan(2\sqrt{x} - x)$

(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge 2\sqrt{x} - x \in \underbrace{D_{\arctan}}_{=\mathbb{R}}\} = [0, +\infty[.$

(40 pontos)

(b) $f'(x) = \dfrac{(2\sqrt{x} - x)'}{1 + (2\sqrt{x} - x)^2} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1 + (2\sqrt{x} - x)^2}, \quad x > 0$

(130 pontos)

$f'(x) > 0 \iff \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 0 \iff x < 1$ em $]0, +\infty[$.

	0		1	
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

f é contínua em $[0, +\infty[$, estrit. crescente em $[0, 1]$ e estrit. decrescente em $[1, +\infty[$.

Existe apenas um máximo (absoluto) no ponto $x = 1$, $f(1) = \arctan(2-1) = \pi/4$.

Existe apenas um mínimo no ponto $x = 0$, $f(0) = 0$.

Quando $x \to +\infty$, $2\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(2 - \sqrt{x})$ tende para $-\infty$,

logo $f(x) = \arctan(2\sqrt{x} - x) \underset{(x \to +\infty)}{\longrightarrow} -\pi/2$.

Isto implica que f tem mínimo relativo (não absoluto) em $x = 0$.

2. (a) f é regular em $[0, 1]$ e $f(0) = f(1) \Rightarrow$ pelo T. Rolle existe $d \in]0, 1[$ tal que $f'(d) = 0$.

(10 pontos)

(b) f' é regular em $[0, d]$ e em $[d, 1]$, logo pelo T. Lagrange, existe $c_1 \in]0, d[$ tal que $f''(c_1) = \dfrac{f'(d) - f'(0)}{d - 0} = \dfrac{0 - 1}{d} < 0$

(20 pontos)

e existe $c_2 \in]d, 1[$ tal que $f''(c_2) = \dfrac{f'(1) - f'(d)}{1 - d} = \dfrac{1 - 0}{1 - d} > 0$.

Desta forma, c_1 e c_2 são diferentes: $c_1 < c_2$.