

- Este teste termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.

1. Considera os seguintes integrais impróprios de 1.ª espécie:

$$(i) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad \text{onde } f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} & \text{se } x \leq -2 \\ e^{-x} & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

Para cada um deles, determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula o seu valor.

2. (a) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se

é simples ou absoluta. (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n + (-1)^n}{n^3 + 3n^2 + 4}$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.

(b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right].$$

3. Seja $\alpha > 0$. Embora a função $\frac{1}{x^\alpha}$ não seja integrável em $[0, 1]$, define-se a quantidade $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ como $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, caso este limite exista. Com esta definição, mostra que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 14; 3. 3.