Cálculo I – agr. 4 2020/21

2º teste – turma TP B-3

Resolução

1.(a) (30 pontos)

$$\int x^2 \ln\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3 \ln x}{6} - \frac{1}{6}\int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3\ln x}{6} - \frac{x^3}{18} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) (40 pontos)

$$\int \frac{x^3+2x^2+4}{x^4+4x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \int \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

C.A.: $\dfrac{x^3+2x^2+4}{x^2(x^2+4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4} \Rightarrow$

$x^3+2x^2+4 = Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2+4 = Ax^3+4Ax + Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2$

$$\begin{cases} 1 = A+C \\ 2 = B+D \\ 0 = 4A \\ 4 = 4B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = 1 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

(c) (30 pontos)

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{e^{t+1}}{\cancel{t^2}}\cdot 3\cancel{t^2}\,dt = 3\int e^{t+1}\,dt$$

$$= 3e^{t+1} + c = 3e^{\sqrt[3]{x}+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

C.A.: $\sqrt[3]{x} = t$

$x = t^3$, $\dfrac{dx}{dt} = 3t^2 > 0$

$(t \neq 0)$

2. $A=\{(x,y): 1 \le y \le \frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}, x\ge 0\}$

(a)
(20 pontos)

$$\begin{cases} y=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}=1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2}=0 \\ - \end{cases}$$

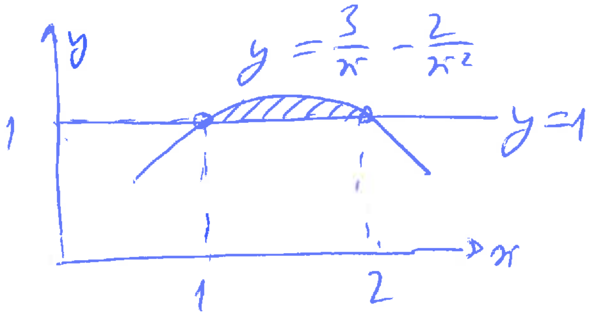
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \wedge x\neq 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm 1}{2} \wedge x\neq 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Os pontos de interseção são $(1,1)$ e $(2,1)$.

(b)
(50 pontos)

$$1 \le \frac{3}{x}-\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x^2}\le 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0$$

$$\Leftrightarrow 1\le x\le 2.$$



$$\text{Área}(A)=\int_1^2\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-1\right)dx$$

$$=\left[3\ln|x|+\frac{2}{x}-x\right]_1^2=3\ln 2+\frac{2}{2}-2-3\ln 1-2+1$$

$$=3\ln 2-2.$$

3. (a)
(20 pontos)

i. Falso.

Sejam f uma função não integrável e $g = -f$, então $f+g=0$. Desta forma, $f+g$ é integrável, mas f e g não são integráveis.

ii. Correto.

Se $f+g$ e f são integráveis, então $g = (f+g) + (-1) \cdot f$ também é integrável.

(b)
(10 pontos)

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ -1, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$

$f^2(x) = 1$.

f não é integrável, mas f^2 é integrável.