Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV: Mestrado Integrado em Eng.ª Eletrónica e Telecomunicações | Mestrado Integrado em Eng.ª de Computadores e Telemática | Licenciatura em Eng.ª Informática

06 de Dezembro de 2019 | Duração: 1h10

2ª prova de avaliação

Justifique devidamente todas as suas respostas.

1. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Determine uma base de S e indique a dimensão de S.

2. Considere a base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathbb{R}^3$, com os vetores $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$ definidos por

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T; \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

e a base $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(a) Determine a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{T}$.

(b) Usando a matriz de mudança de base obtida, represente o vetor $Z = -X_1 - X_2 + 2X_3$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{T}$.

Caso não tenha resolvido a alínea anterior, use a matriz A da Questão 4.

3. Sejam $X = (1, 0, 1)$, $Y = (0, 1, 1)$ e $W = (1, 1, 0)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Seja ainda (X, Y) uma base ordenada do subespaço $\mathcal{F} = \langle X, Y \rangle$ gerado por X e Y.

(a) Justifique que $(X, (-1, 2, 1))$ é uma base ortogonal de $\mathcal{F}$.

(b) Determine a projeção ortogonal de W sobre $\mathcal{F}$.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

sendo $\lambda = -1$ um dos seus valores próprios.

(a) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = -1$ e indique o conjunto de todos os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$.

(b) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável. Em caso afirmativo obtenha uma matriz diagonalizante para A.

Questão	1	2	3	4
Cotação	2.5	6	6	5.5