DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE AVEIRO	MATEMÁTICA DISCRETA
TESTE 2, 14 de Junho de 2023, Duração: **1h45m** **A**	Classificação: ______
Nome: Exemplo de resolução	Nº Mec.: ______
Declaro que desisto: ______	Folhas supl.: ______

1. (4 val) Um hotel tem 20 quartos que vão ser pintados usando 5 cores. Cada quarto é pintado com uma única cor. Considere que só tem tinta azul (uma das cinco cores) para pintar três quartos e o mesmo acontece relativamente à tinta verde, e tem tinta suficiente de cada uma das restantes três cores para pintar todos os quartos.

   a) Determine a série geradora correspondente ao problema de determinação do número de possibilidades de pintar n quartos com as cinco cores.

   b) A partir da série geradora obtida em (1a) obtenha o valor do coeficiente que dá a solução do problema para os 20 quartos.

(a) ______

Como nada é dito consideram-se quartos indistinguíveis (não numerados) usando-se a série geradora ordinária.
Para as tintas de cor azul e verde associamos o mesmo polinómio gerador $x^0+x^1+x^2+x^3$, uma vez que com estas duas cores podemos pintar no máximo 3 quartos.
Às restantes 3 cores associamos a série uniforme

$$U = 1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Donde, a série geradora do problema é dada por

$$Q(x) = (x^0+x^1+x^2+x^3)^2\, U^3 = (U-x^4U)^2\, U^3$$

$$= U^2(1-x^4)^2 U^3 = (1-x^4)^2 U^5 = (1-x^4)^2 \frac{1}{(1-x)^5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$ sendo a_n o coeficiente que dá a solução do problema de determinação do número de possibilidades de pintar n quartos com as cinco cores.

(A)

1. (b) Para $n=20$, pretende-se obter o coeficiente a_{20}:

$$Q(x) = (1-x^4)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\binom{5}{k}\!\right) x^k$$

$$= (1-2x^4+x^8) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5-1}{k} x^k \Leftrightarrow$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^{k+4} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^{k+8}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k - 2\sum_{k=4}^{\infty} \binom{k}{k-4} x^k + \sum_{k=8}^{\infty} \binom{k-4}{k-8} x^k$$

$$= \cdots + \underbrace{\left[\binom{20+4}{20} - 2\binom{20}{20-4} + \binom{20-4}{20-8}\right]}_{a_{20}} x^{20} + \cdots$$

Logo,

$$a_{20} = \binom{24}{20} - 2\binom{20}{16} + \binom{16}{12}$$

$$= \binom{24}{4} - 2\binom{20}{4} + \binom{16}{4}$$

$$= \frac{24!}{4!\,20!} - 2\times\frac{20!}{4!\,16!} + \frac{16!}{4!\,12!},$$ que dá

a soluçõ do problema para os 20 quartos.