

Cálculo I - agr. 4 - 2021/22

Resolução da questão 1 do 1º teste (17 dezembro 2021)

$$1. f(x) := \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

(a) Domínio de definição  $D_f$  de  $f$ :

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x^2}{1+x^2} \in D_{\arcsin} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x^2}{1+x^2} \geq -1 \wedge \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq -1-x^2 \wedge 1-x^2 \leq 1+x^2 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 \geq -1 \wedge 0 \leq 2x^2 \right\} = \mathbb{R}.$$

(b) Para  $x \neq 0$  e pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{\frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}}{1+x^2}} = \frac{-4x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2}},$$

Como  $f'(x) > 0$  para  $x < 0$ ,  $f'(x) < 0$  para  $x > 0$ , e

$f(x)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , conclui-se pelo

critério da monotonicidade que  $f$  é estritamente crescente

em  $] -\infty, 0 ]$  e estritamente decrescente em  $[ 0, +\infty [$ .

Logo,  $0$  é o único extremo, maximizante absoluto, e  $f(0) = \arcsin(1) = \pi/2$  é o único extremo, mínimo absoluto.