Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**Cálculo I - agr. 4** **2016/17**

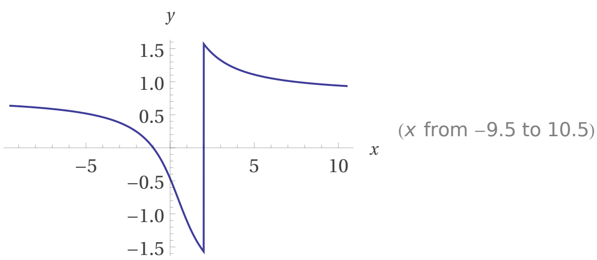
**exame final** Duração: 2h45

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \arctan \frac{x+1}{x-2}$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).




   Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

   (a) Determina o domínio $D_f$ de definição de $f$ e os limites de $f(x)$ quando $x$ tende para $-\infty$ e quando $x$ tende para $\infty$.

   (b) Determina, caso existam, os extremos absolutos e os extremantes absolutos de $f$ (se achares que não existem, deves explicar porquê).

2. (a) Calcula as primitivas das seguintes funções:

   i. $(x+1)e^{2x}$;

   ii. $\dfrac{1}{x^4+x^3-x-1}$.

   Sugestão: Na alínea (i) utiliza primitivação por partes; na alínea (ii) observa que dois zeros reais do denominador são fáceis de detetar por inspeção direta da expressão.

   (b) Justifica a passagem abaixo e completa o cálculo da primitiva fazendo uma mudança de variável:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln(x+1) - \int \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\,dx$$

3. Seja $\mathcal{A} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x \le y \le 2 - |x+1|\}$.

(a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = x^2 - x$ e de $y = 2 - |x+1|$.
<u>Nota:</u> Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1, 2)$ e $(1, 0)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

(b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

(c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

4. Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+1)^2}{\pi^{n+1}}$.

5. Determina a natureza de

(a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

6. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas. Mostra que

(a) se forem ambas convergentes, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ também é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(b) se uma for convergente e a outra for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ diverge;

(c) se foram ambas divergentes, há casos em que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge e outros em que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

**FIM**

**Cotação:**

1. 3; 2. 5; 3. 3; 4. 4; 5. 2,5; 6. 2,5.