Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2022/23**

2.º teste Duração: 1h30

- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Seja $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y+1\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $x = \frac{y^2}{2} - 3$ e $x = y+1$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1,-2)$ e $(5,4)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

2. Considera os seguintes integrais impróprios. Determina a natureza de cada um e, no caso de convergência, o seu valor.

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$;

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx$.

   [Nota: Não compliques: em ambas as alíneas as primitivas envolvidas são quase imediatas após eventual ajuste com constantes multiplicativas adequadas.]

3. (a) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\,\cos(n\pi)}{2n^2+3n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,(n+1)!}{(3n)!}$.

   (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

   $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}.$$

   [Sugestão: Para o caso de ser útil, observa que $(-1)^n = (-1)^{n+2}$.]

4. Seja $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, crescente e estritamente positiva.

   (a) Por que é que o $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe de certeza, finito ou $+\infty$?

(b) Mostra que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt}{f(x)} = +\infty.$$

[Sugestão: Tira partido do Teorema da média para integrais ou da chamada propriedade da limitação do integral para encontrares um minorante para o numerador da fração tal que, com esse minorante, a nova fração tenda para $+\infty$ quando $x \to +\infty$. Mas não te esqueças de justificar os teus argumentos — a sugestão aqui dada não serve de justificação.]

FIM

Cotação:

1. 6; 2.(a) 2; 2.(b) 3; 3.(a) 4; 3.(b) 2; 4.(a) 1; 4.(b) 2.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ \ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ \ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\log_a\|u(x)\|,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	