Questão 1 (Exame final): resolução

Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := a^{\arccos \frac{1}{x^3-1}} - \frac{\pi}{2}$, onde a é o número 1,5, apenas para os valores reais de x menores do que 1 e para os quais a expressão faça sentido.

(a) Determina o domínio D_f de definição de f dentro do intervalo $]-\infty, 1[$.

Como x pertence ao domínio da expressão $f(x)$ se e só se satisfaz todas as condições de existência, para o determinar é necessário resolver as condições $x^3 - 1 \neq 0$ (existência da fração) e $\frac{1}{x^3-1} \in [-1, 1]$ (existência de arccos $\frac{1}{x^3-1}$). Contudo, pela hipótese adicional ($x < 1$) referida no enunciado, a primeira condição é sempre satisfeita: de facto, sendo x^3 estritamente crescente,

$$x < 1 \iff x^3 < 1^3 = 1 \iff x^3 - 1 < 0. \tag{1}$$

A segunda condição é equivalente a $\frac{1}{x^3-1} \leq 1 \wedge \frac{1}{x^3-1} \geq -1$. No entanto, pela (1) sabemos que também $\frac{1}{x^3-1} < 0$, logo $\frac{1}{x^3-1} \leq 1$ é sempre verdadeira para $x < 1$. Assim, resolvendo a

$$\frac{1}{x^3 - 1} \geq -1 \iff 1 \leq -(x^3 - 1) \iff x^3 \leq 0 \iff x \leq 0, \tag{2}$$

onde a primeira passagem é justificada, mais uma vez, pela (1), podemos concluir que o domínio de f dentro do intervalo $]-\infty, 1[$ é $D_f =]-\infty, 0]$.

(b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f no domínio acima determinado (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

Neste caso, é possível determinar a monotonia da função f de duas formas diferentes.

- Verifica-se que $f = \alpha \circ \beta \circ \gamma \circ \delta$, com $\alpha(x) = x - \frac{\pi}{2}$, $\beta(x) = a^x$, $\gamma(x) = \arccos x$ e $\delta(x) = \frac{1}{x^3-1}$. As funções α e β (com $a > 1$) são estritamente crescentes, γ é estritamente decrescente e, como $x^3 - 1$ é estritamente crescente e negativa para $x < 1$, pela (1), então δ é estritamente decrescente em D_f.
  Pela regra da composição de funções monótonas, f é estritamente crescente no domínio.
- A expressão da derivada de f é: $f'(x) = a^{\arccos \frac{1}{x^3-1}} \cdot \ln(a) \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x^3-1}\right)^2}} \cdot \dfrac{-3x^2}{(x^3-1)^2}$.

  Dos quatro fatores de f', só o terceiro não está definido no domínio de f: para existir, $1 - \left(\frac{1}{x^3-1}\right)^2 \neq 0 \iff \frac{1}{x^3-1} \neq \pm 1$. Já sabemos que $\frac{1}{x^3-1} \neq 1$ para $x \in D_f$, mas $\frac{1}{x^3-1} = -1$ para $x = 0$, pela (2): então f' só está definida para $x < 0$.
  Todos os fatores têm sinal constante (positivos os primeiros e e negativos os últimos dois), sendo portanto $f'(x) > 0$ para $x < 0$. Isso, juntamente com a continuidade de f no seu domínio, permite deduzir que f é estritamente crescente em D_f.

Pela monotonia estritamente crescente em $]-\infty, 0]$, f atinge em $x = 0$ o máximo absoluto $f(0) = a^{\pi} - \frac{\pi}{2}$ e em $]-\infty, 0[$, o interior do domínio, não pode ter outros extremos (onde, se existissem, devia mudar o sentido da monotonia).

Quem mostrou que a derivada é sempre positiva no interior do domínio, pode justificar a ausência de extremos pelo teorema de Fermat: se houvesse extremos, a derivada iria anular-se nos extremantes.