Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

Exemplo de Resolução do Teste 3 **TP1/ TP2/TP3** **Duração: 1h 15min**

(5.0) 1. Considere a sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ que verifica a relação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} - 3^{n+1}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 0,\ a_1 = -3$, para $n \geq 2$, onde $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Determine uma fórmula fechada (não iterativa) para a_n, $n \geq 0$.

Resolução.
- Equação característica: $x^2 - 6x + 9 = 0$. Raíz característica dupla igual a 3, isto é, a multiplicidade de 3 é $r = 2$.
- $f(n) = -3^{n+1}$.
- Solução particular: $a_n^{(2)} = Cn^r 3^n$, onde C é uma constante.
- Determinação de C:

$Cn^2.3^n = 6C(n-1)^2.3^{n-1} - 9C(n-2)^2 3^{n-2} - 3^{n+1} \Leftrightarrow Cn^2 = C(2n^2 - 4n + 2) - C(n^2 - 4n + 4) - 3$
$\Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$

$$a_n^{(2)} = -\frac{1}{2}n^2 3^{n+1}.$$

- Solução geral: $a_n = (A + Bn)3^n + C_2 + \frac{-n^2 3^{n+1}}{2}$.
- Determinação de A e B:

De $a_0 = 0$ obtém-se $A = 0$. De $a_1 = -3$ obtém-se $3(A + B) - \frac{9}{2} = -3$. Logo $B = \frac{1}{2}$.
- Solução: $a_n = \frac{1}{2}n3^n - \frac{1}{2}n^2 3^{n+1}$.

(2.5) 2. Determine a sucessão $(c_n)_{n\geq 0}$ associada à função geradora $\mathcal{C}(x) = \frac{1-x^2}{(1+x)^5}$

Resolução.

$\mathcal{C}(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)^5} = \frac{1+x}{(1-x)^4}$

$= (1+x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4-1}{n} x^n$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n+3}{3} x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n+3}{3} x^{n+1}$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n+3}{3} x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{n+2}{3} x^n$

$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\binom{n+3}{3} + \binom{n+2}{3}\right) x^n$. Então $c_0 = 1$, $c_n = \binom{n+3}{3} + \binom{n+2}{3}$, $n \geq 1$.

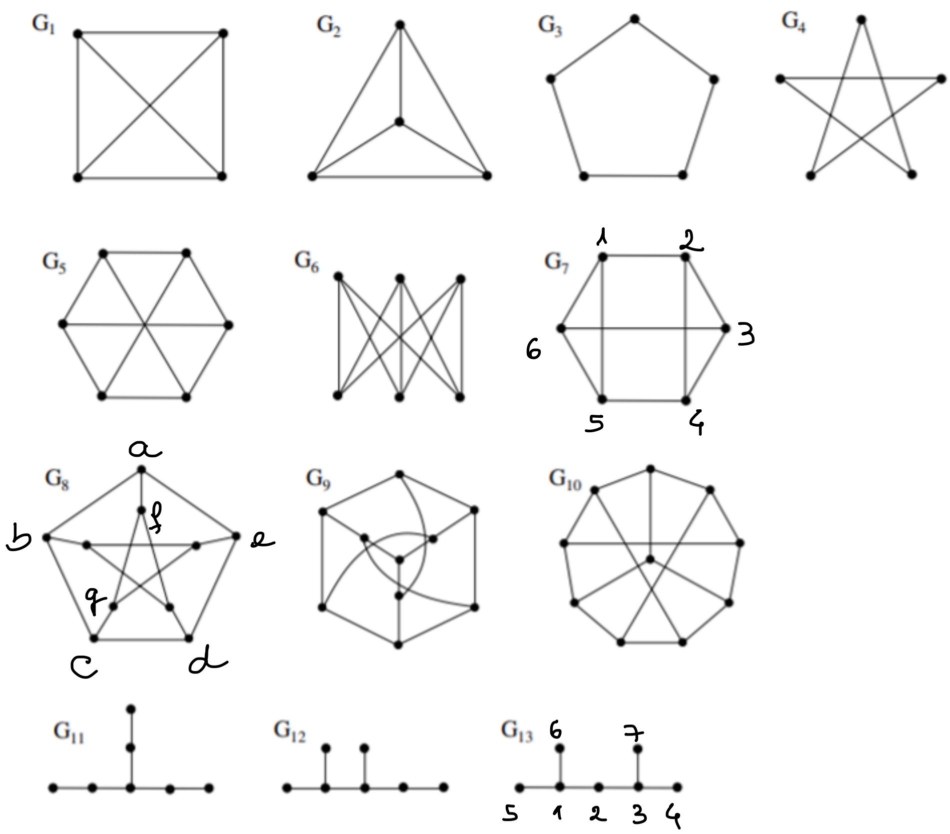
(2.5) 3. Considere o problema de determinar o número de maneiras de distribuir n melões por 4 caixas, de modo que uma caixa fique não vazia e com um número de melões múltiplo de 3, outra com, no máximo, 5 melões, não havendo restrições nas restantes, para $n \geq 3$. Mostre que, a solução do problema pode ser obtida a partir da função geradora:

$$\mathcal{G}(x) = \frac{x^3 - x^9}{(1-x)^3(1-x^3)}.$$

Resolução.

A função geradora é $f(x) = (x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2 =$ $x^3(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+\ldots)^2 == x^3\frac{1}{1-x^3}\frac{1-x^6}{1-x}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^3-x^9}{(1-x)^3(1-x^3)}$.

4. Considere os grafos $G_i = (V(G_i), E(G_i))$, para $i = 1, 2, \ldots, 13$, representados na figura seguinte:



(3.5) 4.(a) Indique um subgrafo de G_8 que seja isomorfo a G_{13}. Justifique, devidamente, a sua resposta.

Para a etiquetagem dos vértices indicada nas figuras acima, a correspondência

$$\varphi : \{1, 2, \ldots, 7\} \to \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

com $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, $\varphi(3) = c$, $\varphi(4) = d$, $\varphi(5) = e$, $\varphi(6) = f$, $\varphi(7) = g$ define um isomorfismo entre o subgrafo de $G_8[E]$ com $E = \{ab, af, ae, bc, cg, cd\}$ e G_{13}.

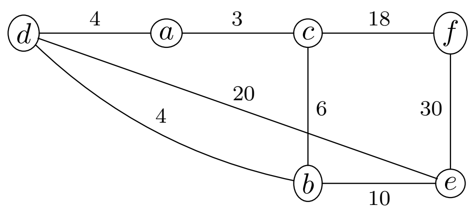
(1.5) 4.(b) Numere os vértices do grafo representado por G_7 e escreva a matriz de adjacência desse grafo.

$$A_{G_7} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. Considere o grafo $G = (V(G), E(G))$, com $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$, definido pela matriz de custos (considere a ordem alfabética dos vértices nas linhas e colunas):

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 6 & 8 & 10 & \infty \\ 3 & 6 & 0 & \infty & \infty & 18 \\ 4 & 8 & \infty & 0 & 20 & \infty \\ \infty & 10 & \infty & 20 & 0 & 30 \\ \infty & \infty & 18 & \infty & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.5) 5.(a) Represente o grafo G com indicação do custo associado em cada uma das arestas.



(3.5) 5.(b) Aplicando o algoritmo de Dijkstra, determine o caminho de custo mínimo entre os vértices d e f do grafo G representado na alínea anterior, indicando também qual é esse custo.

Iteração	a	b	c	d	e	f
0	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\mathbf{0}, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
1	$(\mathbf{4}, \mathbf{d})$	$(8, d)$	$(\infty, -)$	$\times$	$(20, d)$	$(\infty, -)$
2	$\times$	$(8, d)$	$(\mathbf{7}, \mathbf{a})$	$\times$	$(20, d)$	$(\infty, -)$
3	$\times$	$(\mathbf{8}, \mathbf{d})$	$\times$	$\times$	$(20, d)$	$(25, c)$
4	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbf{18}, \mathbf{b})$	$(25, c)$
5	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbf{25}, \mathbf{c})$

Concluímos que o caminho de custo mínimo entre os vértices 4 e 6 é $P = dacf$ com custo 25.