Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 4 7 de maio de 2021

1.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

Questão 1

1. [35] Considere $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

15 (a) Desenvolva a função f em série de MacLaurin.

20 (b) Use a série obtida em (a) para mostrar que $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$(-x^2 \in \mathbb{R})$

b) Por derivação termo a termo da série obtida em (a) (válida no intervalo de convergência $]-\infty,\infty[$) e aplicando propriedades básicas das séries numéricas, obtemos, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} 2n\, x^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-x) \frac{(-1)^{n-1}}{n!} 2n\, x^{2(n-1)}$$

$2n-2 = 2(n-1)$

$$= -x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} 2(n+1)\, x^{2n}$$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$$= -2x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}}_{f(x)}$$

$$= -2x\, e^{-x^2}.$$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 2: ....

Questão 2

2. [40] Considere a função $f(x) = \ln(x+4)$, com $x > -4$.

20 (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 da função f no ponto $c = -3$, com resto de Lagrange.

20 (b) Calcule um valor aproximado de $\ln(2)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $c = -3$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $0,25$.

a) Para todo o $x > -4$,

$$f(x) = \ln(x+4) \qquad f(-3) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+4} = (x+4)^{-1} \qquad f'(-3) = 1$$
$$f''(x) = -(x+4)^{-2} \qquad f''(-3) = -1$$
$$f'''(x) = 2(x+4)^{-3} \qquad f'''(-3) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = -6(x+4)^{-4}$$

Para cada $x > -4$, $x \neq -3$, existe θ entre -3 e x tal que

$$f(x) = \underbrace{f(-3) + f'(-3)(x+3) + \frac{f''(-3)}{2!}(x+3)^2 + \frac{f'''(-3)}{3!}(x+3)^3}_{T^3_{-3}f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}(x+3)^4}_{R^3_{-3}f(x)}$$

ou seja,

$$(*) \quad \boxed{\ln(x+4) = (x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{1}{3}(x+3)^3 - \frac{(\theta+4)^{-4}}{4}(x+3)^4}$$

b) $\ln 2 = f(-2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{(\theta+4)^{-4}}{4}$, para algum $\theta \in]-3,-2[$.

($x=-2$ em (*))

Assim,

$$\ln 2 \simeq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

O erro (absoluto) cometido na aproximação é

$$\left| -\frac{(\theta+4)^{-4}}{4} \right| = \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{(\theta+4)^4}}_{<1} < \frac{1}{4} \times 1 = 0,25.$$

Nota: $-3 < \theta < -2 \iff 1 < \theta+4 < 2 \implies (\theta+4)^4 > 1^4 = 1.$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 3: ....

Questão 3

3. [50] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de periodo 2π, definida no intervalo $[-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x, & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

25 (a) Sabendo que a série de Fourier de f tem a forma

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right],$$

calcule os coeficientes b_n, $n \in \mathbb{N}$.

15 (b) Sendo S a função soma da série anterior, justifique que $S(0) = \dfrac{\pi}{2}$ e represente-a graficamente no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

10 (c) Usando a série de Fourier obtida, prove que $\pi^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2}$.

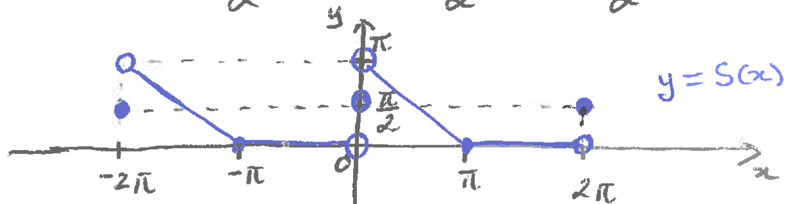
(a) $$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(mx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_{-\pi}^{0} 0\,dx}_{0} + \int_{0}^{\pi} (\pi-x)\,\text{sen}(mx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi-x}{m}\cos(mx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(mx)}{m}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{m} - \frac{1}{m^2}\underbrace{\left[\text{sen}(mx)\right]_0^{\pi}}_{0}\right) = \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(b) Como f é seccionalmente diferenciável em $[-2\pi, 2\pi]$ (...), o Teorema de Dirichlet garante que a série de Fourier converge, em cada ponto $x \in [-2\pi, 2\pi]$ para ~~(a ...)~~ $S(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. Em particular,

$$S(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



(c) Temos $$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2m-1)^2}\cos((2m-1)x) + \frac{1}{m}\,\text{sen}(mx)\right]$$

Em particular, para $x = 0$,

$$S(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2m-1)^2} \times 1 + \frac{1}{m} \times 0\right] \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2m-1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m-1)^2} \Longleftrightarrow \pi^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{(2m-1)^2}.$$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 4: ....

Questão 4

4. [60] Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{1-x^2-y^2}$.

20 (a) Determine o domínio, D, e a curva de nível 1, C_1, da função f. Represente ou descreva ambos geometricamente.

10 (b) Determine as derivadas parciais f'_x e f'_y.

15 (c) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,-3)$.

15 (d) Determine os vetores unitários $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tais que $D_{\vec{v}} f(1,1) = 0$.

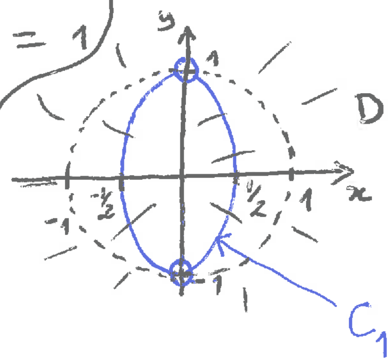
(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \neq 0\}$ (todos os pontos do plano, exceto os pontos da circunferência $x^2+y^2=1$).

$C_1 = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 1\}$

Temos $(x,y) \in C_1 \iff (x,y) \in D \wedge \dfrac{3x^2}{1-x^2-y^2} = 1$

$\iff 3x^2 = 1 - x^2 - y^2 \wedge x^2+y^2 \neq 1$

$\iff \underbrace{4x^2 + y^2 = 1}_{\text{elipse}} \wedge x^2+y^2 \neq 1$



(b) Para qualquer $(x,y) \in D$,

$$f'_x(x,y) = \frac{6x(1-x^2-y^2) - 3x^2(-2x)}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{6x(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

$$f'_y(x,y) = \frac{0 \times (1-x^2-y^2) - 3x^2(-2y)}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{6yx^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

(c) Como f, f'_x e f'_y são contínuas em D, então f é diferenciável nesse conjunto.

Plano tangente ao gráfico de f em $(1,1,-3)$:

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1)$$

$$\iff z = -3 + 0\cdot(x-1) + 6(y-1) \iff z = -3 + 6y - 6$$

$$\iff \boxed{6y - z = 9}$$

(d) Sendo f diferenciável, então $D_{\vec{v}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{v}$, para todo $\vec{v}$ tal que $\|\vec{v}\|=$

Assim,

$D_{\vec{v}} f(1,1) = 0 \iff \nabla f(1,1) \cdot (v_1, v_2) = 0 \iff (0,6)\cdot(v_1,v_2) = 0 \iff v_2 = 0.$

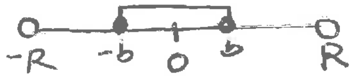
Ora, $\begin{cases} \|\vec{v}\| = 1 \\ v_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1^2 = 1 \\ v_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \pm 1 \\ v_2 = 0 \end{cases}$. Então $\vec{v} = (1,0)$ ou $\vec{v} = (-1,0)$.

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 5: ....

Questão 5

5. [15] Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência $R > 0$. Mostre que a série é uniformemente convergente em cada intervalo da forma $[-b, b]$, com $0 < b < R$.



Temos

(i) $|a_n x^n| = |a_n|\,|x|^n \leq |a_n|\, b^n$, $\forall x \in [-b,b], \forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ é absolutamente convergente (pois $x=b$ pertence ao intervalo de convergência $]-R, R[$), então

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, b^n$ é convergente.

Por (i) e (ii) o Critério de Weierstrass permite concluir que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uniformemente convergente em $[-b, b]$.