Cálculo I – S.E. 2020/21 1.º teste – Resolução

(Pontos) ↓

1. $f(x) := \operatorname{arctg}(\ln(1-x^2))$

(20) (a) $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \in \underbrace{D_{\ln}}_{=\mathbb{R}^+} \wedge \ln(1-x^2) \in \underbrace{D_{\operatorname{arctg}}}_{=\mathbb{R}}$

$$\Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in \,]-1,1[\,.$$

$$\therefore D_f = \,]-1,1[\,.$$

(60) (b) Sendo D_f um intervalo aberto e f diferenciável em todo o seu domínio (é composição de funções diferenciáveis), então, se houver extremos de f, estes têm que ocorrer em pontos onde f' seja zero (Teorema de Fermat)

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{\underbrace{1+[\ln(1-x^2)]^2}_{>0}}, \quad x \in \,]-1,1[$$

		-1		0		1	
$-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$			↗		↘		

Assim, o único extremo ocorre quando $x=0$, tratando-se do máximo absoluto (cf. quadro de variação)

$$f(0) = \operatorname{arctg}(\underbrace{\ln(1-0^2)}_{=0}) = 0 \leftarrow \text{máximo absoluto}$$

↑ maximizante absoluto

2. (a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\overbrace{\cos(\operatorname{tg} x)}^{=u}).\sin(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\,dx$

(30)

Como $\dfrac{du}{dx} = -\sin(\operatorname{tg} x).\sec^2 x = -\dfrac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$,

então a primitiva é $\displaystyle\int -\cos u\,du = -\sin u + C$

$= -\sin(\cos(\operatorname{tg} x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$ em intervalos.

(60) (b) $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x^2+3)(x-2)}\,dx$

Função racional própria já com o denominador completamente fatorizado em $\mathbb{R}$.

C.A.: $\dfrac{x-9}{(x^2+3)(x-2)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+3} + \dfrac{C}{x-2}$

$\Rightarrow x-9 = (Ax+B)(x-2) + C(x^2+3)$

$\Leftrightarrow x-9 = Ax^2 + Bx - 2Ax - 2B + Cx^2 + 3C$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B-2A=1 \\ -2B+3C=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C \\ B+2C=1 \\ -2B+3C=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C \\ 2B+4C=2 \\ -2B+3C=-9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2B+4C=2 \\ 0+7C=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-1 \\ 2B=2+4=6 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-1 \\ B=3 \\ A=1 \end{cases}$

$$\int \frac{x-9}{(x^2+3)(x-2)}\,dx = \int \frac{x+3}{x^2+3}\,dx + \int \frac{-1}{x-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{3}{x^2+3}\,dx - \ln|x-2|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx - \ln|x-2|$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} - \ln|x-2| + C$$

3. $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

(10) (a) $$\int (\ln x)^n\,dx = x.(\ln x)^n - \int \cancel{x}.n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

por partes,
escolhendo 1 para primitivar

$$= x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\,dx$$

(20) (b) $$\int (\ln x)^2\,dx = x.(\ln x)^2 - 2\int(\ln x)^1\,dx$$

Fórmula acima com $n=2$

$$= x.(\ln x)^2 - 2\Big[x.(\ln x)^1 - 1.\int \underbrace{(\ln x)^0}_{=1}\,dx\Big]$$

Outra vez fórmula acima, agora com $n=1$ (dizemos que também é válida em tal caso)

$$= x.(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$