Disciplina: Cálculo II
Ano Letivo: 2022/2023
Turma: TP4-6
Professor: Nelson Faustino
Gabinete: 11.2.14
e-mail: nfaust@ua.pt

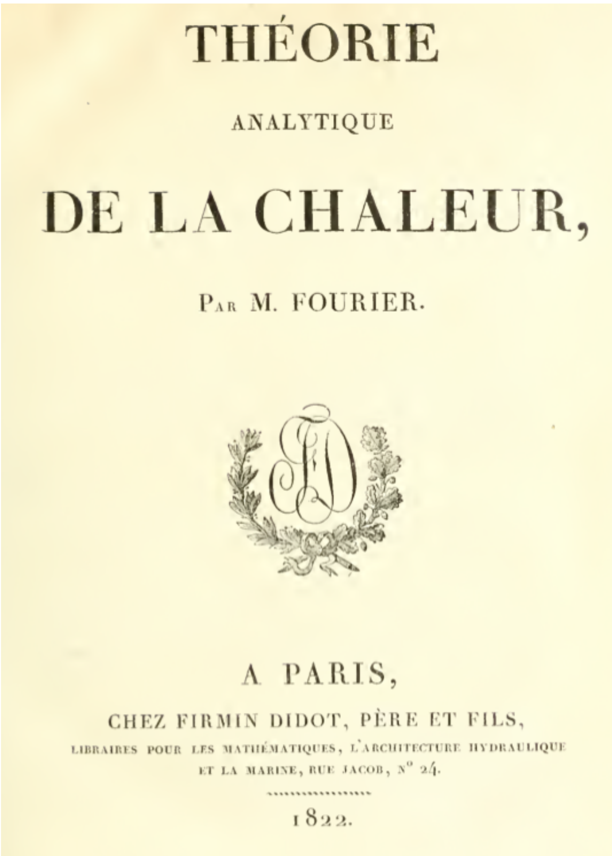
dmat
universidade
de aveiro

Caderno 3: Séries de Fourier

Versão de 21 de março de 2023

Observações

- Estas notas de aula correspondem a um guião que o professor irá seguir fielmente ao longo das aulas. Deve portanto trazê-las sempre consigo em formato papel e/ou digital.
- No final pode encontrar uma lista de exercícios elaborados pelo professor. Estes servirão de complemento aos exercícios propostos nas folhas práticas da disciplina.



THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

"Fourier's great mathematical poem."
citação de Sir Lord Kelvin retirada no artigo científico *On the Secular Cooling of the Earth* [1],[2]

[1] WT Kelvin - Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1863 – https://www.public.asu.edu/ jmlynch/HPS323/documents/KelvinSecularCooling.pdf

[2] Fourier, J. B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot. – https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v.texteImage

Folha Prática 2

Os exercícios selecionados da **Folha Prática 2** correspondem a um conjunto mínimo (altamente) recomendado para estudo autónomo.

Tema	**Exercícios**
Séries de Fourier	12.(a), (c) 13., 15.

Leituras Recomendadas

Para além do texto de apoio (Almeida , 2018) e dos **slides do capítulo 2**, disponíveis na plataforma Moodle (cf. Brás (2023)), espera-se que o aluno procure estudar por alguns dos livros que se encontram na bibliografia recomendada da disciplina. Na tabela abaixo foram catalogadas algumas sugestões de leitura.

Bibliografia	**Secção**
(Tolstov , 2014)	1. Trigonometric Fourier Series (pp. 1–40) [Leitura complementar para aprofundar o tema.]
(Stewart , 2006)	Fourier Series [Todo o capítulo.]

Séries de Fourier $2\pi-$Periódicas

Definição 1 (Série de Fourier). *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função $2\pi-$periódica e integrável em $[-\pi,\pi]$. Designamos por série de Fourier de f, as representações em série da forma*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),$$

onde as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são dadas por

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx \quad (n\in\mathbb{N}_0); \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx \quad (n\in\mathbb{N})$$

correspondem aos coeficientes de Fourier[a] de f.

[a] A definição dos coeficientes de Fourier, em intervalos simétricos da forma $[-\pi,\pi]$, possibilita-nos realizar algumas simplificações imediatas, com recurso às fórmulas mencionadas no **Exercício** 1.

Notação 1 (Série de Fourier de f). *Iremos adotar a notação*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

para nos referirmos à série de funções, determinada a partir da **Definição 1**.

Adenda 1 (Coeficientes de Fourier). *Decorre do facto de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ser $2\pi-$periódica que os coeficientes de Fourier podem ser determinados via as fórmulas*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\cos(nx)dx \quad (n\in\mathbb{N}_0); \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\sin(nx)dx \quad (n\in\mathbb{N}),$$

onde $c\in\mathbb{R}$.

Adenda 2 (Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Para demonstrar a convergência uniforme da série de Fourier, com recurso ao* **Critério de Weierstraß**, *é suficiente demonstrar que as séries numéricas de termos positivos*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \quad \textit{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$$

dado as desigualdades abaixo serem sempre satisfeitas, para todos os $x\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}$:

$$|a_n\cos(nx)|\leq|a_n| \quad \& \quad |b_n\cos(nx)|\leq|b_n|.$$

Exemplo 1 (Função Constante). *Considere a função constante, definida por $f(x)=1$.*

Claramente, esta função é $2\pi-$periódica. Usando as fórmulas integrais do **Exercício** 2, *segue que*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx=\begin{cases}2 & ,n=0\\ 0 & ,n\in\mathbb{N};\end{cases} \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx=0 \ (n\in\mathbb{N}).$$

Destas últimas, conclui-se que a série de Fourier de f é a própria função, dado que

$$1\sim\frac{a_0}{2}=1.$$

Exemplo 2 (Função em Degraus). *Considere a função $2\pi-$ periódica, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida pela condição $f(x)=f(x+2\pi)$ e pela fórmula*

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leq x<0\\ \pi, & 0\leq x<\pi.\end{cases}$$

Para este caso, tem-se[a]

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \pi\cos(nx)dx=\begin{cases}[1]_0^\pi & ,n=0\\ \\ \left[\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi & ,n\in\mathbb{N}\end{cases}=\begin{cases}\pi & ,n=0\\ \\ 0 & ,n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \pi\sin(nx)dx=\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi=\frac{1-(-1)^n}{n}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

Assim,

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(nx)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin((2n-1)x)\quad[\textit{após simplificações}].$$

[a] Da igualdade $\cos(n\pi)=(-1)^n$ $(n\in\mathbb{N})$ segue, pela fórmula fundamental da trigonometria que $\sin(n\pi)=0$ $(n\in\mathbb{N})$.

Adenda 3 (Série de Fourier vs. Série de Taylor). *Pode-se facilmente verificar que a função do* **Exemplo 2** *não admite série de Maclaurin por não ser contínua em $x=0$. Todavia, foi possível determinar a sua série de Fourier.*

De facto, ao calcularmos o valor de a_0 estamos implicitamente a demonstrar que f é, de facto, uma função integrável em $[-\pi,\pi]$ e, por conseguinte, que os coeficientes a_n e b_n podem ser calculados, uma vez que para todo o $n\in\mathbb{N}$, as desigualdades[a] *abaixo são satisfeitas:*

$$|a_n|\leq a_0 \quad \& \quad |b_n|\leq a_0$$

[a] Estas estimativas seguem do facto de $f(x)\geq 0$ em $[-\pi,\pi]$.

Contra-Exemplo 1 (A Série de Fourier não converge para a Função). *O* **Exemplo 2** *permite-nos concluir que o critério de Weierstraßnão é aplicável neste caso. Esta observação decorre do facto da série numérica*[a] *de termos positivos*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}$$

ser divergente.

Por outro lado, para $x=0$ tem-se $f(0)\sim\frac{\pi}{2}$. Todavia $f(0)=\pi$, mostrando assim que **nem sempre a série de Fourier de uma função coincide com a própria função**.

[a] Série numérica obtida com base na desigualdade $\left|\dfrac{2}{2n-1}\sin((2n-1)x)\right|\leq\dfrac{2}{2n-1}$, válida para todo o $x\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}$.

Exemplo 3 (**Onda Triangular**). *Considere a função $2\pi-$ periódica, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida pela condição $f(x)=f(x+2\pi)$ e pela fórmula*

$$f(x)=|x| \quad (x\in[-\pi,\pi[).$$

Claramente, a restrição de f ao intervalo $[-\pi,\pi]$ trata-se de uma função par pelo que:

i) $f(x)\cos(nx)$ *define uma função par em* $[-\pi,\pi]$;

ii) $f(x)\sin(nx)$ *define uma função ímpar em* $[-\pi,\pi]$,

Segue então que

i) $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx \quad (n\in\mathbb{N}_0)$;

ii) $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin(nx)dx=0 \quad (n\in\mathbb{N})$.

pelo que a determinação da série de Fourier de f reduz-se ao cálculos dos coeficientes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

No caso de $n=0$, o facto de $\dfrac{x^2}{2}$ definir uma primitiva de x, permite-nos concluir que

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi.$$

No caso de $n>0$, integração por partes conduz-nos à sequência de igualdades:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\\
&= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\\
&= -\frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n^2} \quad (n\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Assim, após simplificações conclui-se que

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Adenda 4 (**Convergência Uniforme da Série de Fourier**). *Com base no que foi mencionado na* **Adenda 2**, *podemos concluir a convergência uniforme da função série de Fourier da função do* **Exemplo 3**, *com base na convergência da série numérica de termos positivos*[a].

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

[a]Deixamos ao cargo do leitor a justificação, passo por passo, da convergência da série numérica assim como a justificação da uniforme da série de Fourier de f.

Funções Seccionalmente Contínuas/Diferenciáveis

Antes de abordarmos o **Teorema de Dirichlet** – que nos permite determinar a soma da série de Fourier – comecemos por introduzir as definições de função seccionalmente contínua e/ou diferenciável.

Para simplificar a exposição, irá ser considerada a seguinte notação, envolvendo os limites laterais de uma função.

Notação 2 (Limites Laterais). *Iremos considerar a notação:*

1. $f(c^-)$ *para denotar o* *limite lateral à esquerda* *de* $c \in \mathbb{R}$, *i.e.*

$$f(c^-) := \lim_{x \to c^-} f(x);$$

2. $f(c^+)$ *para denotar o* *limite lateral à direita* *de* $c \in \mathbb{R}$, *i.e.*

$$f(c^+) := \lim_{x \to c^+} f(x);$$

Definição 2 (Função Seccionalmente Contínua/Diferenciável). *Seja* f *uma função real de variável real e* $[a, b]$ *um intervalo fechado e limitado de* $\mathbb{R}$. *Dizemos que:*

1. f *é* **seccionalmente contínua em** $[a, b]$ *se existir um* *conjunto finito e ordenado*[a] $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *de* $[a, b]$ *tal que:*
   i) $c_0 = a$ *e* $c_n = b$;
   ii) $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ *pontos de descontinuidade* *de* f *em* $[a, b]$;
   iii) f *contínua nos subintervalos* $]c_{j-1}, c_j[$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ *de* $[a, b]$;
   iv) *os limites laterais* $f(c_{j-1}^+)$ *e* $f(c_j^-)$ *existem e são finitos* $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
2. f **é seccionalmente contínua em** $\mathbb{R}$ *se esta for seccionalmente contínua em todo o subintervalo* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$.
3. *Uma função seccionalmente contínua,* f, *é ainda uma* **função seccionalmente diferenciável** *se a função derivada,* f', *é seccionalmente contínua em* $\mathbb{R}$.

[a] De uma forma mais abreviada, $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ corresponde a uma partição do intervalo $[a, b]$.

Adenda 5 (Continuidade & Diferenciabilidade). *Decorre naturalmente da* **Definição 2** *que:*

(a) *Toda a função contínua em* $I \subseteq \mathbb{R}$ *é seccionalmente contínua em* $I \subseteq \mathbb{R}$;

(b) *Toda a função diferenciável em* $I \subseteq \mathbb{R}$ *é seccionalmente contínua*[a] *e diferenciável em* $I \subseteq \mathbb{R}$.

[a] Para se chegar nesta conclusão, usou-se o facto de toda a função diferenciável em $I \subseteq \mathbb{R}$ é também uma função contínua em $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 4 (Função Tangente). *A partir do gráfico da função tangente,* $y = \tan(x)$, *tem-se o seguinte:*

1. *Trata-se de uma função* $\pi-$*periódica em* $\mathbb{R}$, *ao invés das funções seno e cosseno que são* $2\pi-$*periódicas;*
2. *Em intervalos da forma* $[-\pi, \pi]$, *o gráfico desta exibe descontinuidades nos pontos* $x = -\frac{\pi}{2}$ *e* $x = \frac{\pi}{2}$;
3. *Não*[a] *se trata de uma função seccionalmente contínua pelo simples facto de os pontos* $x = \pm\frac{\pi}{2}$ *corresponderem às assíntotas verticais do seu gráfico.*

[a] Pode obter o mesmo tipo de conclusão para a derivada da função tangente, $\sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Exemplo 5 (Funções Seccionalmente Contínuas/Diferenciáveis). *As funções ilustradas no* **Exemplo 2** *&* **Exemplo 3** *são exemplos de funções seccionalmente contínuas em* $\mathbb{R}$. *De facto, atendendo a que ambas são funções* 2π*-periódicas, podemos reduzir o estudo destas ao intervalo*[a] $[-\pi, \pi]$. *A saber:*

Exemplo 2:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , 0 \leq x < \pi \\ 0 & , x = \pi \end{cases}$$

Exemplo 3:

$$f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

i) No caso do **Exemplo 2**, *tem-se que esta é descontínua em* $x = 0$, *dado que* $f(0^-) = 0$ *e* $f(0^+) = \pi$ *pelo que é seccionalmente contínua em* $[-\pi, \pi]$;

ii) No caso do **Exemplo 3**, *tem-se o gráfico de uma função contínua em* $[-\pi, \pi]$ *pelo que esta é automaticamente uma função seccionalmente contínua.*

Adicionalmente:

i) Nos intervalos $]-\pi, 0[$ *e* $]0, \pi[$, *a derivada de* f *da função do* **Exemplo 2** *coincide com a função nula* (0). *Acresce ainda que, a partir das igualdades envolvendo limites laterais:*

   (a) $f'(-\pi^+) = \lim_{x \to -\pi^+} f'(x) = 0$;

   (b) $f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$;

   (c) $f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$;

   (d) $f'(\pi^-) = \lim_{x \to \pi^-} f'(x) = \lim_{x \to \pi^-} f'(x) = 0.$

   concluindo assim que a função do **Exemplo 2** *se trata de uma função seccionalmente diferenciável em* $[-\pi, \pi]$.

ii) No caso do **Exemplo 3**, *pode-se verificar que, mesmo não existindo* $f'(0)$, *tem-se que esta também se trata de uma função seccionalmente diferenciável em* $[-\pi, \pi]$, *dado que:*

   (a) $f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$;

   (b) $f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$

[a] Em ambos os casos, o cálculo do valor de f em $x = \pi$, $f(\pi)$, foi realizado com base na sequência de igualdades $f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi)$.

Teorema de Dirichlet

Teorema 1 (Teorema de Dirichlet). *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função* $2\pi-$*periódica e seccionalmente diferenciável e* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a soma da série de Fourier, determinada*[a] *via* **Definição 1**. *Então para todo o* $c \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$S(c) = \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2},$$

onde $f(c^\mp)$ *denotam os limites laterais à esquerda/direita de* c, *introduzidos em* **Notação 2**.

[a] Equivalente a escrever $f(x) \sim S(x)$, de acordo com a **Notação 1**.

Adenda 6 (Soma da Série de Fourier). *Decorre naturalmente do* **Teorema 1** *a seguinte igualdade*[a]*:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \begin{cases} f(x) & , f \text{ contínua em } x \\ \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & , f \text{ descontínua em } x. \end{cases}$$

[a] $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$, desde que f seja contínua em x – $f(x^-)$ e $f(x^+)$ limites laterais à esquerda/direita de x.

Exemplo 6 (Aplicação do Teorema de Dirichlet). *No* **Exemplo 5** *verificámos que as funções* $2\pi-$*periódicas, introduzidas no* **Exemplo 2** *&* **Exemplo 3***, estão nas condições do* **Teorema de Dirichlet**[a]*. Adicicionalmente, podemos ainda concluir o seguinte:*

i) Atendendo a que $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ correspondem aos pontos de descontinuidade da função do **Exemplo 2***, as igualdades*[b] $f(0^-) = 0$ *e* $f(0^+) = \pi$ *permitem-nos concluir que*

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin((2n-1)x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq k\pi \\ \frac{\pi}{2} & , x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ii) No caso do **Exemplo 3***, o* **Teorema 1** *garante-nos que a série de Fourier f converge pontualmente*[c] *para a função módulo, i.e.*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} = |x|.$$

Para uma interpretação gráfica de cada um dos exemplos, vide os links abaixo – gentilmente cedidos pela Professora Isabel Brás[d]*:*

i) Série de Fourier do **Exemplo 2** *– link* https://www.geogebra.org/m/ykmzcvsc *permite-nos ilustrar as conclusões mencionadas em (Almeida , 2018, Exemplo 2.17);*

ii) Série de Fourier do **Exemplo 3** *– link* https://www.geogebra.org/m/snrmgyt2 *permite-nos ilustrar as conclusões mencionadas em (Almeida , 2018, Exemplo 2.16).*

[a] Vide **Teorema 1**.
[b] Vide também **Contra-Exemplo 1**.
[c] Já tínhamos averiguado na **Adenda 4** que a série de Fourier do **Exemplo 3** convergia uniformente.
[d] Vide (Brás , 2023, slide 47/54).

Adenda 7 (Falha de Convergência Uniforme). *Já tínhamos verificado no* **Contra-Exemplo 1** *que a série de Fourier da função do* **Exemplo 2** *não coincidia com o valor de f de $x = 0$. Por outro lado, o* **Teorema 1** *permite-nos concluir não apenas que a série de Fourier* **não coincide com o valor** *de $f(x)$ em pontos da forma $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, como nos permite confirmar que a série de Fourier não converge pontualmente para uma função contínua.*

Assim, com base no estudo realizado no **Caderno 2***, podemos automaticamente concluir que a série de Fourier do* **Exemplo 2** *não*[a] *converge uniformemente.*

[a] Encontrar o respetivos resultados no **Caderno 2**, assim como mencionar os demais detalhes, ficam ao cargo do leitor.

Séries de Fourier dos Senos e dos Cossenos

As séries de Fourier de senos e cossenos têm como ponto de partida o seguinte resultado, que pode ser facilmente demonstrado:

Lema 1 (Decomposição em Funções Pares e Ímpares). *Toda a função*[a] *definida* f *num conjunto simétrico*[b] D*, pode ser escrita*[c] *na forma*

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x),$$

onde

1. f_p, *unicamente determinada* por $f_p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ *é uma* **função par** *em* D*;*
2. f_i, *unicamente determinada* por $f_i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ *é uma* **função ímpar** *em* D*.*

---

[a] Extensão da definição que se encontra no Exercício 9. de (Tolstov , 2014, p. 40).

[b] Dizemos que um conjunto D é simétrico se $-x \in D$, $\forall\ x \in D$.

[c] Usando a estrutura de espaço vetorial, é ainda possível demonstrar que toda a função definida num intervalo simétrico pode ser representada como a soma direta de subespaços de funções, associados a funções pares e ímpares.

Adenda 8 (Exemplos de Conjuntos Simétricos). *O* **Lema 1** *é aplicável a intervalos da forma* $[-c, c]$, $]-c, c[$, $[-c, c] \setminus \{0\}$, $]-c, c[\setminus\{0\}$ $(c > 0)$*, dados estes se tratarem de conjuntos simétricos.*

Adenda 9 (Cálculo dos Coeficientes de Fourier). *Pode facilmente demonstrar, com recurso às identidades integrais mencionadas no* **Exercício 1***, que no intervalo* $[-\pi, \pi]$ *os coeficientes de Fourier, introduzidos na* **Definição 1** *podem ser reescritos na forma*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_p(x)\cos(nx)dx \quad (n \in \mathbb{N}_0); \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_i(x)\sin(nx)dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Teorema 2 (Séries de Fourier dos Senos/Cossenos). *Seja* f *uma função real de variável real integrável em* $[0, \pi]$*. Então, os seguintes resultados são válidos:*

Série de Fourier dos Senos – *A função* $f_i : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < \pi \\ -f(-x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

admite uma extensão $2\pi-$*periódica em* $\mathbb{R}$*. Adicionalmente,*

$$f_i(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Série de Fourier dos Cossenos – *A função* $f_p : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < \pi \\ f(-x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

admite uma extensão $2\pi-$*periódica em* $\mathbb{R}$*. Adicionalmente,*

$$f_p(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Adenda 10 (**Função do Exemplo 2**). *Note que a função do* **Exemplo 2** *pode ser reescrita como a soma das funções f_p e f_i, definidas por*

$$f_p(x) = \frac{\pi}{2} \quad (-\pi \leq x < \pi) \quad \& \quad f_i(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & , -\pi \leq x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

pelo que[a] $f_p(x) \sim \dfrac{\pi}{2}$ *e*

$$f_i(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \sin((2n-1)x).$$

[a] À semelhança do **Exemplo 1**, pode confirmar que $f_p(x) \sim \frac{\pi}{2}$ a partir das identidades trigonométricas do **Exercício 2**.

Exemplo 7 (**Série de Fourier dos Senos**). *Pode facilmente ser verificado que a extensão ímpar e da função $f(x) = x$ em $[0, \pi]$ ao intervalo $[-\pi, \pi]$, coincide com $f(x)$, dado*[a] *que $f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, para todo o $x \in [-\pi, \pi]$. Fica ao cargo do leitor:*

1. *Verificar que $x \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$;*
2. *Verificar que $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ são os pontos de descontinuidade da $2\pi-$extensão periódica de f a partir do intervalo $[-\pi, \pi[$, assim como $f(\pi^-) = \pi$ e $f(\pi^+) = -\pi$;*
3. *Averiguar que pode aplicar o* **Teorema 1** *para concluir*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n} = \begin{cases} x & , x \neq (2k+1)\pi \\ 0 & , x \neq (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z});$$

4. *Justificar porque a série de Fourier* **não converge uniformemente**.

[a] Vide **Lema 1**.

Exemplo 8 (**Séries de Fourier de Cossenos**). *Observe que a função do* **Exemplo 3**, *assim como a função f ilustrada no link*[a]

https://www.geogebra.org/m/pw3em5xg

podem ser interpretadas como a série de funções dos cossenos das funções, definidas por x e x^2 respetivamente, no intervalo $[0, \pi]$.

E tal como no **Exemplo 3**, *a extensão $2\pi-$periódica da função par $f_p(x) = x^2$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Logo, pelo* **Teorema de Dirichlet**[b] *concluímos*[c] *que*

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}, \quad \textit{para todo o} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, pode ainda concluir, via o **Critério de Weierstraß**, *que a série de Fourier de x^2 também converge uniformemente em $\mathbb{R}$.*

[a] Gentilmente partilhado pela Professora Isabel Brás em (Brás , 2023, slide 48/54).
[b] Vide **Teorema 1**.
[c] Embora não tenha sido feito em detalhe, espera-se que confirme o cálculo da série de Fourier, assim como a aplicabilidade do **Teorema de Dirichlet**.

Adenda 11 (**Convergência Uniforme vs. Derivação/Integração).** *Atendendo à convergência uniforme da série do* **Exemplo 8**, *podemos imediatamente concluir, por* x^2 *ser integrável em* $\mathbb{R}$ *que a respetiva série de funções também é integrável e, por conseguinte, que*

$$\frac{x^3}{3} = \int_0^x t^2 dt = \int_0^x \frac{\pi^2}{3} dt + 4\sum_{n=1}^{n} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2} dt \right) = \ldots = \frac{\pi^2 x}{3} + 4\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}.$$

Já no caso da derivação, o argumento de convergência uniforme não pode ser aplicado[a]. *De facto, se derivarmos, termo a termo, a série de Fourier associada a* $\frac{x^2}{2}$, *não iremos obter a série de Fourier do* **Exemplo 7**.

[a]Deixa-se ao cuidado do leitor justificar o porquê, com base na teoria abordada no **Caderno 2**.

Adenda 12 (**Sobreposição de Funções Pares e Ímpares).** *Note-se que extensão* $2\pi-$ *periódica da função* $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$ $(x \in [-\pi, \pi[)$, *ilustrada no link*[a]

https://www.geogebra.org/m/xwurte9x

não se trata de uma função par e ímpar. Todavia, com recurso ao **Teorema 1**, *podemos facilmente concluir que* $f_p(x) = \frac{x^2}{4}$ *corresponde à parte par de* $f(x)$ *e* $f_i(x) = -\frac{x}{2}$ *à parte ímpar de* $f(x)$.

Logo, pela **Adenda 9**, *segue que*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x^2}{4} \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0); \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{x}{2}\right) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A confirmação de que a série de Fourier da função dada pode ser obtida como combinação linear das séries de Fourier do **Exemplo 7** *&* **Exemplo 8** *fica a cargo*[b] *do leitor.*

[a]Gentilmente partilhado pela Professora Isabel Brás em (Brás , 2023, slide 48/54).
[b]Embora não seja pedido, é fortemente recomendável que o leitor averigue se pode aplicar o **Teorema de Dirichlet** para calcular a soma da série de Fourier.

Séries de Fourier $2L-$ Periódicas

Tal como ilustrado em (Almeida , 2018, pp. 37-38) e em (Stewart , 2006, p. 6), a teoria de séries de Fourier pode ser generalizada para funções $2L-$periódicas. Para tal, comece por considerar função g, obtida a partir de f por translações e homotetias:

$$g(x) = f(\omega x + \phi), \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

Se interpretar ω resp. ϕ como a velocidade de propagação vs. fator de fase de uma onda sinusoidal, pode chegar nas seguintes conclusões, interpretáveis[3] sob o ponto de vista físico:

i) Se considerarmos velocidade de propagação unitária ($\omega = 1$), então a mudança de fase ϕ de uma onda sinusoidal f mantém invariante o período T:

$$g(x) = f(x + \phi) = f(x + \phi + T) = f((x + \phi) + T) = g(x + T), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) Se induzirmos à nossa onda sinusoidal uma velocidade $\omega > 0$, então $\frac{T}{\omega}$ é o período de g:

$$g(x) = f(\omega x) = f(\omega x + T) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = g\left(x + \frac{T}{\omega}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[3]Vide (Tolstov , 2014, pp. 3–6).

As conclusões, obtidas anteriormente, correspondem ao seguinte lema.

Lema 2 (Funções Periódicas). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função $T-$periódica, então a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) = f(\omega x + \phi) \quad (\omega > 0, \quad \phi \in \mathbb{R})$$

é uma função periódica, de período $P = \dfrac{T}{\omega}$.

Por outro lado, para o cálculo da série de Fourier de funções $2\pi-$periódicas, introduzido na **Definição 1**, pode-se ainda obter que a série de Fourier de f, $f(x) \sim S(x)$, pode ser obtida como o limite

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

de uma soma de funções $S_n(x)$, envolvendo funções $2\pi-$periódicas e ortogonais[4] em $[-\pi, \pi]$ relativamente ao produto interno entre funções f e g, definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

De facto, as identidades integrais do **Exercício 2** podem ser reescritas na forma

(a) $\langle \cos(nx), 1 \rangle = \begin{cases} 2\pi & , n = 0 \\ 0 & , n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(b) $\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

(c) $\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

(d) $\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

Usando agora argumentos de linearidade, podemos facilmente concluir que para a soma dos n primeiros termos da série de Fourier, dada por

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

são válidas as igualdades

$$\frac{1}{\pi}\langle S_n(x), g(x) \rangle = \begin{cases} a_0 & , g(x) = 1 \\ a_m & , g(x) = \cos(mx) \\ b_m & , g(x) = \sin(mx) \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}),$$

mostrando assim que os coeficientes da série de Fourier pode ser unicamente determinados, via relações de ortogonalidade[5]. Portanto, a substituição do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ definido por

$$\langle f, g \rangle_L = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$$

permite-nos facilmente reformular a **Definição 1** em termos de funções $2L-$periódicas, tendo como referência o **Lema 2** e a igualdade

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\left(\frac{\pi x}{L}\right) g\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (T = 2L).$$

[4]Duas funções $2\pi-$periódicas, f e g, são ortogonais se $\langle f, g \rangle = 0$.

[5]Vide (Tolstov , 2014, Capítulo 2).

Definição 3 (**Série de Fourier de Funções $2L-$periódicas**). *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função $2L-$periódica e integrável em $[-L,L]$. Designamos por série de Fourier de f, as representações em série da forma*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ \right),$$

onde as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são dadas por

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\quad (n\in\mathbb{N}_0);\qquad\qquad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

correspondem aos **coeficientes de Fourier** *de f.*

Adenda 13 (**Resultados para Funções $2L-$periódicas**). **Todos os resultados**, *abordados ao longo deste caderno para funções $2\pi-$periódicas,* **são também válidos para funções $2L-$periódicas**.

Exemplo 9 (**Função de Período 1**). *Para qualquer número real x, é comum denotar $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ a parte inteira k de x. Acresce que:*

(a) A partir desta definição, é possível construir a função escada $\lfloor\cdot\rfloor:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\lfloor x\rfloor=k$ em subintervalos $[k,k+1[\subseteq\mathbb{R}$ $(k\in\mathbb{Z})$. Em particular, esta coincide com a função nula (0) em $[0,1[$;

(b) Com base na propriedade anterior, é possível demonstrar que a função f, definida por

$$f(x)=x-\lfloor x\rfloor$$

é uma função $1-$periódica, tal como pode constatar a partir do seu gráfico

`https://www.geogebra.org/calculator/qcwqzghg`.

Usando agora o **Lema 2**, *é possível de concluir que a função g, definida por $g(x)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$, é uma função $2\pi-$periódica.*

Adenda 14 (**Extensão Periódica**). *A descrição obtida em* **Exemplo 9** *diz-nos que esta função se trata extensão $1-$periódica da função, definida em $[0,1[$, por $f(x)=x$. Assim, com base na* **Definição 3**, *e nas propriedades de integração*[a] *envolvendo funções periódicas, tem-se que*[b]

$$a_n=2\int_0^1 x\ \cos(2n\pi x)dx\quad (n\in\mathbb{N}_0);\qquad\qquad b_n=2\int_0^1 x\ \sin(2n\pi x)dx.$$

A partir daqui, pode calcular facilmente a série de Fourier de $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ de modo análogo ao que já fez[c] *p.e. no* **Exemplo 3**.

[a] Propriedades análogas às mencionadas na **Adenda 1**.

[b] A constante $\frac{1}{L}=2$, que aparece em ambos os integrais, resulta da condição $2L=1$.

[c] Se fizer a mudança de variável $x=\dfrac{t}{\pi}$ $(0<t<\pi)$ poderá facilmente calcular a série de Fourier para a função do **Exemplo 9**, a partir dos cálculos já realizados no **Exemplo 3**.

Contra-Exemplo 2 (**Argumento de Paridade não se adequa**). *Uma das principais razões pela qual é preferível usar a extensão* $1-$*periódica de* x*, a partir do intervalo* $[0,1[$ *prende-se com o simples facto de* $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ *apresentar uma expressão mais simples de calcular se, ao invés tivéssemos considerado a extensão periódica a partir do intervalo* $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.

Por outro lado, pode-se verificar que o **Lema 1** *não nos conduz a expressões satisfatórias. De facto, o cálculo de* f_p *e* f_i *via as fórmulas do* **Lema 1**, *obteríamos*

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{1}{2} \quad \& \quad \frac{f(x)-f(-x)}{2}=x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}.$$

Para o segundo caso, tem-se ainda que

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}, & 0<x\leq \dfrac{1}{2} \\ \\ x+\dfrac{1}{2}, & -\dfrac{1}{2}\leq x<0. \end{cases} \quad \left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\}\right).$$

Contra-Exemplo 3 (**Função Periódica sem Série de Fourier**). *No* **Exemplo 4** *justificámos que a função tangente é uma função* $\pi-$*periódica mas não é seccionalmente contínua em* $\mathbb{R}$.

De facto, para esta função nem é possível determinar a série de Fourier uma vez que

$$a_0:=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tan(x)dx$$

corresponde a um integral impróprio divergente.

Exemplo 10 (**Extensão Par e Ímpar**). *A função* f*, definida por*

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & ,0\leq x<\frac{1}{2}\\ 1 & ,\frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$$

trata-se de uma função integrável no intervalo $[0,1]$*, uma vez que* $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ *existe, pelo que se tem*

$$f_i(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x) \quad \& \quad f_p(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x)$$

correspondem às séries de Fourier de senos e cossenos de funções $2-$*periódicas em* $\mathbb{R}$*, obtidas das extensões ímpares e pares,* f_i *e* f_p *respetivamente, ao intervalo* $[-1,1]$*. Pode ainda verificar o seguinte, com base no gráfico de* f_i *e* f_p*, ilustrado em*

https://www.geogebra.org/calculator/yrcm3kde*:*

(a) *O gráfico da função* f_i *assim como o gráfico da função derivada*[a]*,* f_i'*, corresponde ao gráfico de uma funções contínuas em* $[-1,1]$ *pelo que neste caso o* **Teorema de Dirichlet** *é aplicável para calcular a soma da função* $2-$*periódica;*

(b) *Já o gráfico da função* f_p *corresponde ao gráfico de uma função contínua* $[-1,1]$ *mas descontínua mas para o qual* $f_p'(0)$ *não existe. Averiguar se* f_p' *é seccionalmente contínua em* $\mathbb{R}$*, via aplicação da* **Definição 2***, assim como averiguar se possível aplicar o equivalente do* **Teorema de Dirichlet** *de modo a concluir que soma da série em* $x=0$ *é igual a* $\dfrac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$ *fica a cargo*[b] *do leitor.*

[a]O gráfico desta função é claramente o gráfico de uma função par.
[b]Comece primeiro por calcular a série de Fourier dos cossenos de f_p.

Exercícios Propostos

Revisões

1 **INTEGRAL VS. PARIDADE DE UMA FUNÇÃO**

Seja f uma função real de variável real integrável em $[-a, a]$ $(a > 0)$. Mostre que:

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, se f é uma função ímpar.

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, se f é uma função par.

(c) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x) - f(-x)}{2}dx = 0$

(d) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x) + f(-x)}{2}dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx$

SUGESTÕES:

(a)+(b) Faça uso da igualdade $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ e da substituição $x = -t$ $(-a \leq x \leq 0)$ em um dos integrais.

(c)+(d) Demonstre que a função f pode ser reescrita como $f = f_p + f_i$, onde

i) $f_p : [-a, a] \to \mathbb{R}$ definida por $f_p(x) := \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ define uma função par;

ii) $f_i : [-a, a] \to \mathbb{R}$ definida por $f_i(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ uma função ímpar.

2 **IDENTIDADES ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**

Demonstre as seguintes igualdades envolvendo funções trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \begin{cases} 2\pi & , n = 0 \\ 0 & , n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} \pi & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} \pi & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

SUGESTÕES:

(a) Com base na fórmula $\cos(n\pi) = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ – que pode ser demonstrada por indução – para determinar o valor de $\sin(n\pi)$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) Deduza a expressão de $\cos(mx)\cos(nx)$ a partir das identidades trigonométricas abaixo:

i) $\cos(mx + nx) = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx)$;

ii) $\cos(mx - nx) = \cos(mx)\cos(nx) + \sin(mx)\sin(nx)$.

De seguida, aplique o item (a) para calcular os integrais da forma $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx \pm nx)dx$.

(c) Análogo à estratégia usada anteriormente – $\sin(mx)\sin(nx) = (?)$ [fórmulas anteriores].

(d) Pode usar o facto de o produto de uma função par por uma função ímpar, num intervalo simétrico, ser uma função ímpar.

Funções $2\pi-$periódicas

3 SÉRIE DE FOURIER DOS SENOS E COSSENOS[6]

Para a função por ramos f, definida em $[0, \pi]$ por $f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - x & , \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$:

(a) Obtenha as extensões par e ímpar da função f, f_p resp. f_i, ao intervalo $[-\pi, \pi]$.

(b) Determine a série de Fourier dos senos de f.

(c) Determine a série de Fourier dos cossenos de f.

(d) Represente graficamente o valor da soma da série de Fourier de $f_p + f_i$ no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

(e) Diga, justificando, se a série de Fourier de $f_p + f_i$ é uniformemente convergente.

4 SÉRIE DE FOURIER

Considere a extensão $2\pi-$periódica da função f, definida em $]-\pi, \pi]$ por $f(x) = x^3 - x$.

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Diga, justificando, se é possível aplicar o **Teorema 1** para calcular a soma da série de Fourier.

(c) Diga, justificando, se a série de Fourier é uniformemente convergente.

OBSERVAÇÕES:

(a) É possível determinar a série de Fourier com base no **Exemplo 7** & **Exemplo 8**.

(b) Terá de investigar se a função é seccionalmente diferenciável, via a **Definição 2**.

(c) Vide **Caderno 2**.

5 SOMA DE SÉRIES NUMÉRICAS

Use as séries de Fourier, obtidas no **Exemplo 3**, **Exemplo 7** & **Exemplo 8**, para determinar o valor exato das soma das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Funções $2L-$Periódicas

6 VERDADEIROS E FALSOS

Comente a veracidade das seguintes afirmações (**V**erdadeiro ou **F**also), justificando convenientemente a sua resposta.

(a) Se f e g são funções $T-$periódicas, então a função soma $f + g$ é $T-$periódica.

(b) Se f é uma função $\pi-$periódica, então a função g definida pontualmente por $g(x) = f(x+\pi)$ é $2\pi-$periódica.

(c) Se f é uma função $2\pi-$periódica, então a função g definida pontuamente por $g(x) = f(\pi x)$ é uma função $2-$periódica.

(d) Se f e g são duas funções $2\pi-$periódica, então a função $\dfrac{f}{g}$ é uma função $2\pi-$periódica.

(e) Se f é uma função injetiva, então f não é uma função periódica.

(f) A soma de duas funções periódicas é sempre uma função periódica.

[6] Versão reformulada do Exemplo 2 de (Tolstov , 2014, pp. 37-38).

7 Período Fundamental

Determine o período das seguintes funções:

(a) $\cos(2x)$ (b) $\text{cotg}(3x)$ (c) $\sin^2(x)$ (d) $\sec^2(\frac{5}{2}x - 3)$.

8 Série de Fourier de funções 2−periódicas

Determine a série de Fourier de cada uma das seguintes funções $2-$periódicas, definidas em $]0, 2]$ por:

(a) $\text{sgn}(1 - x)$ (b) $1 - |x - 1|$ (c) $\sqrt{x}$ (d) $\lfloor x \rfloor + 1$.

Observação:

(a) Em $\mathbb{R}$, sgn denota a função sinal, definida por $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0. \end{cases}$

(d) $\lfloor x \rfloor$ já foi introduzida no **Exemplo** 9.

9 Série de Fourier de funções 2L−periódicas

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2L-$periódica e integrável em $[-L, L]$.

(a) Mostre[7] que

$$f(x - L) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + (-1)^n b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

(b) Determine as funções g e h, tais que:

i) $g(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ii) $h(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

(c) Diga, justificando, se é possível concluir de imediato que as funções g e h, obtidas anteriormente, se tratam de funções pares e ímpares, respetivamente.

Sugestão:

Realize apenas manipulações algébricas envolvendo as identidades trigonométricas usuais.

[7] Reformulação de um dos itens do Exercício 9. de (Tolstov , 2014, p. 40).

Bibliografia

Almeida (2018) A. Almeida, *Cálculo II – Texto de apoio* (versão fev. 2018)
Disponível na plataforma Moodle da UA.

Brás (2020) I. Brás, *Sucessões e Séries de Funções; Séries de potências(revisitadas) e Séries de Fourier* (versão 26/2/2023)[8]
Disponível na plataforma Moodle da UA.

Stewart (2006) J. Stewart, *Fourier Series*[9], Página Web Stewart Calculus, 2006
Formato Digital: disponível a partir `desta hiperligação` [só clicar no texto a azul]

Tolstov (2014) G. P. Tolstov (2012), *Fourier series*[10], Dover Publications Inc.

[8]Aparece no Moodle com o título *Slides para o Capítulo 2.*

[9]Este tema não consta no livro de **James Stewart (2013)** que tem vindo a ser citado com alguma frequência.

[10]Traduzido da versão original, em Russo, por Richard A. Silverman.