Álgebra Linear e Geometria Analítica

Geometria analítica em $\mathbb{R}^3$: vetores, retas e planos

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

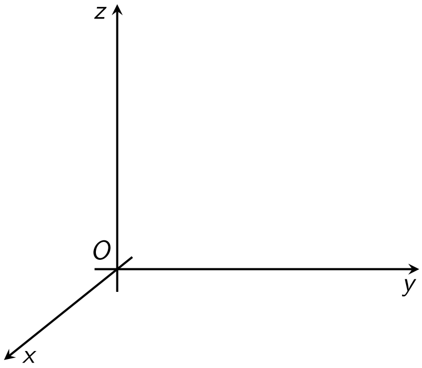
Referenciais em $\mathbb{R}^3$

Fixamos um sistema de coordenadas:

$$O \quad \rightarrow \quad \text{origem}$$

$$\left.\begin{matrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{eixos coordenados}$$

$$\left.\begin{matrix} xOy \\ xOz \\ yOz \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{planos coordenados}$$



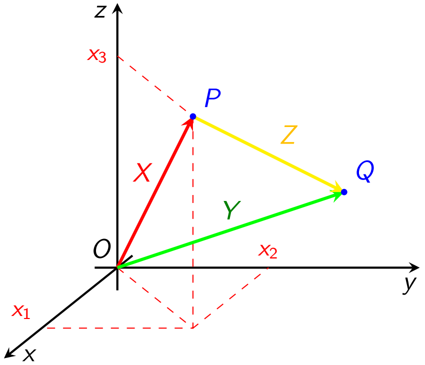
Pontos e vetores em $\mathbb{R}^3$

$x_1, x_2, x_3 \rightarrow$ coordenadas do ponto P

Associamos ao segmento de reta orientado $\overrightarrow{OP}$ o vetor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3 \rightarrow$ coordenadas do ponto Q e seja Y o vetor associado a $\overrightarrow{OQ}$



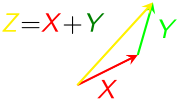
Ao segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ fica associado o vetor $Z = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{bmatrix}$

Observação: A notação adotada neste texto para representar um ponto ou vetor de coordenadas $x,\ y,\ z$ é $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Outra notação frequentemente adotada é (x, y, z).

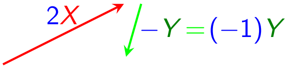
Adição, multiplicação por escalar e combinação linear

Sejam $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares

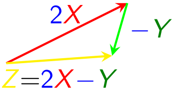
Adição: $Z = X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$



Multiplicação por escalar: $\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$



Combinação linear: $Z = \alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}$



Retas em $\mathbb{R}^3$ – Equações vetoriais e paramétricas

Dada uma reta $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor $v = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$X(x, y, z) \in \mathcal{R} \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v.$$

Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v$, ou seja, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

A partir desta equação obtêm-se as equações paramétricas de $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Eliminando o parâmetro α do anterior sistema, obtém-se um sistema de grau 1 com 3 incógnitas e 2 equações, ditas as equações cartesianas de $\mathcal{R}$.

Retas em $\mathbb{R}^3$ – Equações cartesianas

- Caso: $v_1 \neq 0, \; v_2 \neq 0, \; v_3 \neq 0.$

  Das equações paramétricas obtém-se

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

- Caso: $v = (v_1, v_2, v_3)$ tem exatamente uma coordenada v_i nula.

  Se $v_1 = 0$ $(v_2 \neq 0, \; v_3 \neq 0)$, das equações paramétricas obtém-se

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

  Nos casos em que $v_2 = 0$ ou $v_3 = 0$ deduzem-se equações cartesianas semelhantes.

- Caso: $v = (v_1, v_2, v_3)$ tem exatamente duas coordenadas nulas.

  Se as coordenadas nulas de v são v_1 e v_2 $(v_3 \neq 0)$, das equações paramétricas obtém-se

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

  Nos casos em que v tem outras coordenadas nulas, deduzem-se equações cartesianas semelhantes.

Planos – Equações vetoriais e paramétricas

Dado um plano $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetores diretores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ não colineares ($u \neq \delta v$, para todo o $\delta \in \mathbb{R}$),

$$X(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v.$$

Uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ é

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

a partir da qual se obtêm as equações paramétricas de $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Planos – Equação geral

Eliminando os parâmetros α e β do anterior sistema, obtém-se uma equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dita equação geral ou equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.