

Nome:

n^o de estudante:

Declaro que desisto:

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - SE

2020/21

2^o teste

Duração: 1h30

- Este exame contém 4 questões no total, com uma questão por folha. O enunciado do exame contém no total 5 folhas numeradas de 0 até 4. Na página inicial (esta página, pág. 0) encontra também a cotação e formulários.
- Cada pergunta deve ser respondida na **respetiva folha do enunciado**, na frente ou no verso. Se necessário podes usar folhas de continuação mas tens de dizer qual é a questão a que estás a responder.
- **Não podes misturar respostas a diferentes perguntas** na mesma folha. Por exemplo, não podes responder a parte da pergunta 2 na mesma folha da questão 1, e vice-versa.
- Deves identificar todas as folhas que usares com o teu **nome e n^o de estudante**. Deves indicar no enunciado de cada pergunta **quantas folhas de continuação** usaste para essa pergunta. Repete essa informação na tabela em baixo.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente **justificados** e todas as respostas devem ser **cuidadosamente redigidas**.

Cotação:

1. 4; 2. 6; 3. 7; 4. 3.

Número de folhas de continuação:

Questão 1:

Questão 2:

Questão 3:

Questão 4:

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{d}{dx}$
$mu(x)$, $m \in \mathbb{R}$	$mu'(x)$
$u(x)^n$, $n \in \mathbb{R}$	$nu(x)^{n-1}u'(x)$
$\log_a u(x) $, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$
$a^{u(x)}$, $a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x) \ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)u'(x)$
$\cotan u(x)$	$-\csc^2 u(x)u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x) \sec u(x)u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\cotan u(x) \csc u(x)u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$	$1 + \cotan^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1 - u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1 - u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 1).

1. Calcula $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})} dx$.

Sugestão: Começa por fazer a mudança de variável definida por $x = t^2$, $t > 0$.

Resposta à questão 1:

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 2).

2. Seja $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x - 2 \leq y \leq 1 - |x|\}$.

(a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = x^2 - x - 2$ e de $y = 1 - |x|$.

Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1, 0)$ e $(\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$, mas nenhuma cotação terá na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

(b) Representa geometricamente a região \mathcal{A} .

(c) Calcula a área da região \mathcal{A} .

Resposta à questão 2:

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 3).

3. Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2 - 10n + 1};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}.$

Resposta à questão 3:

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 4).

4. Considera os gráficos das funções $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.
- (a) Qual o valor da área da superfície compreendida entre os dois gráficos quando x varia de 0 a 1? Não te esqueças de justificar a tua resposta.
 - (b) Qual o valor da área da superfície compreendida entre os dois gráficos quando x varia de 1 a ∞ ? Não te esqueças de justificar a tua resposta.

Resposta à questão 4: