Aplicações Lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica - ALGA A **Soluções da Folha Prática 7**

---

1. (a) Não; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim; (e) Não.

2. Não.

3. Sim.

4. (a) $(1, -19)$; (b) $(a+b, -5a+2b)$.

5. (a) $3+2t-5t^2+2t^3$; (b) $c+at+bt^2+at^3$.

6. i. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; ii. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; iii. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; iv. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$.

8. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (b) $4t^2-4t+1$.

9. (b) i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; ii. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; iii. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; iv. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. (a) $[L(X_1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[L(X_2)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
    (b) $L(X_1) = t^2+t+2$, $L(X_2) = -t+2$.
    (c) $3/2t^2+t+4$;
    (d) $\left(\frac{a+b}{2}\right)t^2+bt+2a$.

11. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. (a) $\ker L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = -y = -z = t\}$ e $\operatorname{im} L = \mathbb{R}^3$.
    (b) Por exemplo, $\{(1,-1,-1,1)\}$ é uma base de $\ker L$ e $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base da $\operatorname{im} L$.
    (c) L não é injetiva. L é sobrejetiva.

14. (a) O primeiro elemento não pertence e o segundo pertence.
    (b) O primeiro elemento pertence e o segundo não pertence.
    (c) Por exemplo, $\{t^2+t-1\}$ é uma base de $\ker L$ e $\{t^2, t\}$ é uma base da $\operatorname{im} L$.
    (d) L não é injetiva nem sobrejetiva.

15. (a) O conjunto vazio é base de $\ker L$ e $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base da $\operatorname{im} L$.

    (b) O conjunto vazio é base de $\ker L$ e $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base da $\operatorname{im} L$.

16. (c) i. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; ii. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

17. (a) $L(1,2,3) = (9,7,16)$ e $L(x,y,z) = (x+y+2z, 2x+y+z, 3x+2y+3z)$.

    (b) Não.

    (c) $\operatorname{im} L = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a+b-c=0\}$ e $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma sua base;
    $\ker L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x=z \text{ e } y=-3z\}$ e $\{(1,-3,1)\}$ é uma sua base.

    (e) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 5 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

18. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

    (b) $[L(X)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$. $L(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

    (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

    (d) $L(x,y,z) = (y-2z, 2x-y)$.

    (e) $\ker L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x=z \text{ e } y=2z\}$ e $\{(1,2,1)\}$ é uma sua base.

    (f) L não é injetiva.

    (g) 2.

    (h) L é sobrejetiva.

    (i) $\operatorname{im} L = \mathbb{R}^2$.

19. (a) $L(x,y) = (2x+y, 0, 2x)$.

    (b) $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\operatorname{im} L$ e L não é sobrejetiva.

    (c) $\dim(\ker L) = 0$ e L é injetiva.

    (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

    (e) $\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

20. (a) $L(x,y,z) = (x+2y+z, 3y+z, x-y)$.

    (b) $\operatorname{im} L = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a-b-c=0\}$, $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base para $\operatorname{im} L$ e $\dim(\operatorname{im} L) = 2$.

    (c) L não é sobrejectiva.

    (d) $\dim(\ker L) = 1$ e L não é injetiva.

    (e) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

    (f) ii. Por exemplo, $[X]_S = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

22. (a) 2; (b) 1.

23. (a) 7; (b) 5.