Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 4 19 de julho de 2021

Exame da Época de Recurso Duração: 2h30m

N.º: ....**Nome:** ....

Curso: .... **N.º de folhas suplementares entregues na Questão 1:** ......

Declaro que desisto: ....

O exame é composto por 8 (oito) questões as quais devem ser respondidas em folhas separadas.
O formulário encontra-se no verso da última folha.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

Questão 1

1. [**30**] Considere a série de potências $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,2^{n-1}}$.

   (a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

   (b) Determine a soma $S(x)$.

   (**Sugestão:** Comece por identificar a derivada $S'(x)$ e tenha em conta o valor de $S(1)$)

(a) Temos uma série de potências centrada em $c = 1$ e coeficientes $a_n = \frac{1}{n\,2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

O raio de convergência R é dado por

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n\,2^{n-1}} (n+1)\, 2^n \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n} = 2 \times 1 = 2.$$

Intervalo de convergência: $]1-2, 1+2[=]-1, 3[$.

- $x = 3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-1)^n}{n\,2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ (série divergente, pois tem a mesma natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

- $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{n\,2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\,2^{n-1}}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^n}{n\, 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}.$$

continua →

A série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$$

é divergente (já visto).

A série dada, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}$, é uma série alternada a qual se prova que é convergente. Basta aplicar o Critério de Leibniz (...)

<u>Conclusão</u>: O domínio de convergência da série de potências dada é $[-1, 3[$. A série ~~converge~~ é absolutamente convergente em $]-1, 3[$ e é simplesmente convergente no ponto $x = -1$.

(b) Para todo o $x \in]-1, 3[$, temos

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x-1)^n}{n\, 2^{n-1}} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\, 2^{n-1}} (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n-1}.$$

Trata-se de uma série geométrica de razão $\frac{x-1}{2}$. Para $\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$ a última série converge e a sua soma é

$$S'(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}} = \frac{2}{2-(x-1)} = \frac{2}{3-x}, \quad -1 < x < 3.$$

Assim, $S(x) = -2 \ln |3-x| + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Mas $S(1) = 0 \Leftrightarrow -2 \ln 2 + K = 0 \Leftrightarrow K = 2 \ln 2$.

Portanto, $S(x) = -2 \ln (3-x) + 2 \ln 2 = 2 \ln \left(\frac{2}{3-x} \right)$.

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 2: ....

Questão 2

2. [20] Usando o resto na forma de Lagrange, mostre que o erro (absoluto) cometido ao aproximar $f(x) = \text{sen}\,(2x)$ pelo polinómio de MacLaurin $T_0^3 f(x)$, no intervalo $]-0.1, 0.1[$, é inferior a $\frac{2}{3} \times 10^{-4}$.

Temos, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \text{sen}\,(2x)$$
$$f'(x) = 2\cos(2x)$$
$$f''(x) = -4\,\text{sen}(2x)$$
$$f'''(x) = -8\cos(2x)$$
$$f^{(4)}(x) = +16\,\text{sen}(2x).$$

Pelo Teorema de Taylor, para todo $x \neq 0$ existe θ entre 0 e x tal que

$$f(x) = T_0^3 f(x) + \frac{f^{(4)}(\theta)}{4!} x^4.$$

Passo No intervalo $]-0.1, 0.1[$ (portanto, $|x| < 0.1$), temos

$$\left| f(x) - T_0^3 f(x) \right| = \left| \frac{16\,\text{sen}(2\theta)}{4!} x^4 \right|$$
$$= \frac{4}{6} \underbrace{|\text{sen}(2\theta)|}_{\leq 1} \underbrace{|x|^4}_{< 0.1^4}$$
$$< \frac{2}{3} \times 1 \times 0.1^4$$
$$= \frac{2}{3} \times 10^{-4}.$$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 3: ....

Questão 3

3. [30] Considere a função f definida em $[-\pi,\pi]$ por $f(x)=|x|(\pi-|x|)$.

(a) Justifique que a série de Fourier de f é uma série de cossenos, ou seja, da forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) \qquad (a_n\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}_0)$$

e calcule o coeficiente a_0 que figura nesta série.

(b) Sabendo agora que a série de Fourier de f é

$$\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2},$$

mostre que esta série converge uniformemente em $[-\pi,\pi]$ e indique a sua função soma.

(c) Usando o resultado da alínea anterior, prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

(a) A série de Fourier de f é uma série de cossenos, uma vez que a função f é par (i.e., $f(-x)=|-x|(\pi-|-x|)=|x|(\pi-|x|)=f(x), \forall x\in[-\pi,\pi]$).

Cálculo do coeficiente a_0:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}\right)=\frac{\pi^2}{3}.$$

(b) Sendo f seccionalmente diferenciável e contínua em $[-\pi,\pi]$, pelo Teorema de Dirichlet a série de Fourier de f converge (pontual) para a própria função, i.e.,

$$(*)\quad \frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}=|x|(\pi-|x|),\ \forall x\in[-\pi,\pi]$$

~~Esta série con~~

A convergência uniforme desta série resulta da aplicação do Teorema de Weierstrass:

temos
(i) $\left|\dfrac{\cos(2nx)}{n^2}\right| = \dfrac{|\cos(2nx)|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é convergente (série de Dirichlet de ordem $\alpha = 2 > 1$). Por (i) e (ii) conclui-se que a série de Fourier é efetivamente uniformemente convergente em $[-\pi,\pi]$.

(c) Tomando $x = \frac{\pi}{2}$ em ⊛, vem

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\cancel{2}n\frac{\pi}{\cancel{2}})}{n^2} = \left|\frac{\pi}{2}\right|\left(\pi - \left|\frac{\pi}{2}\right|\right)$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

ou ainda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 4: ....

Questão 4

4. [40] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$.

(a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os (em minimizante local, maximizante local ou ponto de sela).

(b) Determine os extremos absolutos de f no círculo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$.

(a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 4 \, , \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Pontos críticos de f:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 4y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Portanto, possui um únicos ponto crítico, $(0,1)$.

<u>Classificação</u>: temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6 \, , \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 \, , \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz Hessiana de } f\text{)}.$$

Como $\det H_f(0,1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 6 > 0$, então $(0,1)$ é <u>minimizante local de f</u>.

(b) Como f é contínua no conjunto fechado e limitado C, então f possui extremos absolutos nesse conjunto (consequência do Teorema de Weierstrass).

<u>Continua</u> →

Como f é diferenciável no interior de $\mathcal{C}$, então o ponto crítico $(0,1)$ é o único candidato a extremante absoluto nessa região (interior de $\mathcal{C}$).

Estudo dos extremantes na fronteira de $\mathcal{C}$:

$$\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = 16$$

Como $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ para todo o (x,y) na fronteira de $\mathcal{C}$, então os pontos (x,y) candidatos a extremantes absolutos nessa fronteira verificam $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$; para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2+y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = \lambda 2x \\ 4y-4 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(3-\lambda) = 0 \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \underline{\quad} \\ y^2 = 16 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 3 \\ 4y-4 = 6y \\ \underline{\quad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \frac{3}{2} \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \frac{5}{2} \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 3 \\ y = -2 \\ x^2+4 = 16 \end{cases}$$

Assim, na fronteira, temos os candidatos $(0,\pm 4)$ e $(\pm\sqrt{12}, -2)$.

Como:

- $f(0,1) = 0 + 2 - 4 + 1 = -1$
- $f(0,4) = 0 + 2\times 16 - 4\times 4 + 1 = 17$
- $f(0,-4) = 0 + 2\times 16 + 4\times 4 + 1 = 49$
- $f(\pm\sqrt{12}, -2) = 3\times 12 + 2\times 4 - 4\times(-2) + 1 = 53$,

então

$f(0,1) = -1$ é o mínimo de f em $\mathcal{C}$

e $f(\pm\sqrt{12}, -2) = 53$ é o máximo de f em $\mathcal{C}$.

(este último é atingido nos pontos $(\sqrt{12}, -2)$ e $(-\sqrt{12}, -2)$).

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 5: ....

Questão 5

5. **[25]** Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $3x^2y^2y' = 1 + x^2$.

(b) $y' + 2xy = e^{-x^2}\cos x$.

(a) $3x^2y^2y' = 1+x^2$ (EDO de variáveis separáveis)

$\Leftrightarrow 3y^2y' = \frac{1}{x^2} + 1$
$(x \neq 0)$

$\Leftrightarrow \int 3y^2\,dy = \int \left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx$

$\Leftrightarrow y^3 = -\frac{1}{x} + x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{c + x - \frac{1}{x}} \quad , \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$

(b) $y' + 2xy = e^{-x^2}\cos x$ (EDO linear de 1ª ordem).

Podemos resolver esta EDO através de um fator integrante (a alternativa seria usar o método de variação da constante).

Como $\int 2x\,dx = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$, então um fator integrante é $\mu(x) = e^{x^2}$:

$e^{x^2}(y' + 2xy) = e^{x^2}(e^{-x^2}\cos x)$

$\Leftrightarrow e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = \cos x$

$\Leftrightarrow (e^{x^2}y)' = \cos x \Leftrightarrow e^{x^2}y = \int \cos x\,dx$

$\Leftrightarrow e^{x^2}y = \operatorname{sen} x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = (c + \operatorname{sen} x)\,e^{-x^2} \quad , \quad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 6: ....

Questão 6

6. [20] Considere as seguintes equações diferenciais:

$$y''' + y' = e^x \tag{1}$$

$$y''' + y' = 6\cos(2x). \tag{2}$$

(a) Mostre que $y_1 = \dfrac{e^x}{2}$ é solução da equação (1) e que $y_2 = -\text{sen}\,(2x)$ é solução da equação (2).

(b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' + y' = e^x + 6\cos(2x). \quad (3)$$

(a) Como $y_1 = \dfrac{e^x}{2}$, $y_1' = y_1'' = y_1''' = \dfrac{e^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$,

então $y_1'''(x) + y_1'(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^x}{2} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como

$y_2 = -\text{sen}(2x)$, $y_2' = -2\cos(2x)$, $y_2'' = 4\,\text{sen}(2x)$, $y_2''' = 8\cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$,

então

$y_2'''(x) + y_2'(x) = 8\cos(2x) - 2\cos(2x) = 6\cos(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) A solução geral da EDO dada tem a forma $y = y_H + y_P$, onde y_H é a solução geral da EDO homogénea associada $y''' + y' = 0$ e y_P é uma solução particular da EDO completa.

<u>Determinação de</u> y_P:

Atendendo à alínea (a) e ao Princípio de Sobreposição, podemos escrever que

$$y_P(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{e^x}{2} - \text{sen}(2x)$$

é uma solução particular da EDO completa (3).

continua →

Determinação de y_H:

Eq. característica: $r^3 + r = 0 \iff r(r^2+1) = 0$.

Assim, a equação característica possui as soluções ~~a~~ $r = 0$ e $r = \pm i$ (todos raízes simples do polinómio característico).

$$\left.\begin{array}{l} r = 0 \longrightarrow e^{0x} = 1 \\ r = \pm i \begin{array}{l} \nearrow \cos x \\ \searrow \operatorname{sen} x \end{array} \end{array}\right\}$$

formam um sistema fundamental de soluções para a EDO $y''' + y' = 0$.

Portanto,

$$y_H = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Resumindo, a solução geral da EDO (3) é

$$y = \underbrace{c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x}_{y_H} + \underbrace{\frac{e^x}{2} - \operatorname{sen}(2x)}_{y_P},$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 7: ....

Questão 7

7. **[25]** Usando transformadas de Laplace, determine a solução do problema de valores iniciais

$$y'' + y = 4e^t, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3.$$

Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, para $s > s_y$.

Usando a linearidade da transformação de Laplace e algumas fórmulas conhecidas (ver formulário), obtemos

$$\mathcal{L}\{y''+y\}(s) = \mathcal{L}\{4e^t\}(s)$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + Y(s) = 4\cdot\frac{1}{s-1}, \quad s > 1.$$

$$\Leftrightarrow (s^2+1)\,Y(s) - 4s + 3 = \frac{4}{s-1}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+1)\,Y(s) = 4s - 3 + \frac{4}{s-1}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{4s^2-7s+7}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\underset{(C.A.)}{\Leftrightarrow} Y(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{2s-5}{s^2+1}$$

C.A.:

$$\frac{4s^2-7s+7}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

(...)

$A = 2$, $B = 2$, $C = -5$

$$\Leftrightarrow Y(s) = 2\cdot\frac{1}{s-1} + 2\cdot\frac{s}{s^2+1} - 5\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = 2\,\mathcal{L}\{e^t\}(s) + 2\,\mathcal{L}\{\cos t\}(s) - 5\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \mathcal{L}\{\underbrace{2e^t + 2\cos t - 5\operatorname{sen} t}_{y(t)}\}(s)$$

Portanto, a solução do P.V.I. dado é

$$y(t) = 2e^t + 2\cos t - 5\operatorname{sen} t, \quad t \geq 0.$$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 8: ....

Questão 8

8. [10] Considere a equação diferencial

$$y'' + 2by' + a^2y = 0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que se ϕ é uma solução da equação dada, então $\psi = \phi'$ é também solução da mesma equação.

A EDO dada é uma equação diferencial de 2ª ordem linear homogénea, de coeficientes constantes. Em particular, qualquer sua solução em $\mathbb{R}$ admite derivadas de todas as ordens.

Se ϕ é solução da EDO, então

(*) $\phi''(x) + 2b\phi'(x) + a^2\phi(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Mostremos que $\psi = \phi'$ também é solução:

$$\psi''(x) + 2b\psi'(x) + a^2\psi(x) =$$

$$= \phi'''(x) + 2b\phi''(x) + a^2\phi'(x)$$

$$= \big(\underbrace{\phi''(x) + 2b\phi'(x) + a^2\phi(x)}_{=0 \text{ (por hipótese (*))}}\big)'$$

$$= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$