Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2020/21**

2.º teste - turma TP4A-1 Duração: 1h15

- **Este teste termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$; (b) $\dfrac{12x+8}{x^4-4x^2}$; (c) $\dfrac{1}{\sin^2 x - (\sin x)(\cos x)}$, para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\setminus\{\frac{\pi}{4}\}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes; na alínea (c) faz a mudança de variável $x = \arctan t$, $t > 0$, e recorda a fórmula $\cos^2(\arctan t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, de onde sai que $\sin^2(\arctan t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Seja $\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln^2(x) \leq y \leq \ln(x)\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = \ln(x)$ e de $y = \ln^2(x)$.

   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que as soluções são $(1, 0)$ e $(\mathrm{e}, 1)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

   Nota: Se tiveres necessidade de primitivar $\ln^2(x)$, sugere-se que uses primitivação por partes.

3. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e g a função definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pela igualdade

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

   (a) Com a ajuda do Teorema da média para integrais, mostra que o contradomínio de g está contido no de f.

   (b) No caso particular de f ser a função definida por $f(x) := \alpha + \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, onde α é um número real dado, calcula, caso existam, os limites quando $x \to +\infty$ das funções f e g.

FIM

Cotação:

1. 10; 2. 7; 3. 3.