6. Transformadas de Laplace

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 93–102

Isabel Brás

UA, 22/5/2023

Cálculo II – Agrup. IV 22/23

Resumo dos Conteúdos

1. Definição, exemplos, existência e propriedades básicas
2. Propriedades da Transformada de Laplace
   - Aplicação à resolução de um PVI linear
3. Transformada de Laplace Inversa
   - Aplicação à resolução dum PVI linear(cont.)

Transformada de Laplace

Definição:

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, chama-se transformada de Laplace de f à função F definida por

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

nos pontos $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente.

Notação: $F(s)$ ou $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ou $\mathcal{L}\{f(t)\}(\mathrm{s})$ ou, simplesmente, $\mathcal{L}\{f\}$.

Exemplo

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 1$. Por definição

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt$$

para $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente. Ora, estudando a convergência do integral conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0$$

(para $s \leq 0$ este integral diverge). Assim,

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0$$

Outros Exemplos

- $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \neq 1,\ t \neq 2, \\ 2 & \text{se} \quad t = 1, \\ 0 & \text{se} \quad t = 2. \end{cases}$

  $$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \qquad [\text{Verifique!}]$$

- $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > a, \quad (a \in \mathbb{R})$

- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

- $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$

- $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$

Linearidade da Transformada de Laplace

Proposição:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponha-se que existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_f$ e $s > s_g$, respectivamente. Então:

(i) $\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \qquad s > \max\{s_f, s_g\};$

(ii) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \qquad s > s_f.$

Exemplos de aplicação:

1. $$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}, \qquad s > a \ \text{ e } \ s > -a \\ &= \frac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|, \qquad (a \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

2. $\mathcal{L}\{\mathrm{senh}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|, \qquad (a \in \mathbb{R})$ análogo, exercício!

Existência da Transformada de Laplace

Observação:

Nem toda a função admite transformada de Laplace.
Por exemplo, $f(t) = e^{t^2}$ não tem transformada de Laplace, uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt$ diverge para qualquer $s \in \mathbb{R}$.
[Verifique!]

Questão:

Que propriedades da função f poderão garantir a existência de $\mathcal{L}\{f\}(s)$, com $s > s_0$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$?

Condição Suficiente de Existência de Transformada de Laplace

Definição:

Sejam função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. f diz-se uma função de ordem exponencial k (à direita) se existem constantes $M > 0$, $T > 0$ tais que

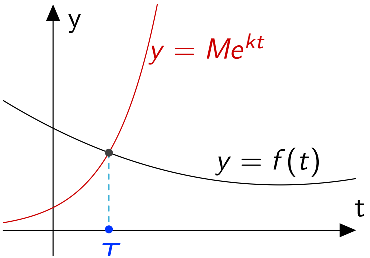
$$|f(t)| \leq M\, e^{kt}\,, \qquad \forall t \geq T\,.$$

Teorema:

Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e f é de ordem exponencial k (para algum $k \in \mathbb{R}$) então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > k$.

Sobre funções de ordem exponencial

Ilustração gráfica de uma função de ordem exponencial (caso $k > 0$):



Exemplos de funções de ordem exponencial:

1. Funções polinomiais;
2. Funções limitadas;
3. Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} cos(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} sen(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação:

Se f é uma função de ordem exponencial k, então

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st} f(t) = 0, \qquad \text{para todo } s > k. \qquad [\text{Porquê?}]$$

Observação:

A função $f(t) = e^{t^2}$ <u>não</u> é de ordem exponencial.

Propriedades da Transformada de Laplace

1. (deslocamento na transformada)
   $f : [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0,b]$, $b>0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então
   $$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda), \ \ \text{para} \ \ s > \lambda + s_f$$

2. (transformada do deslocamento)
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0,b]$, $b>0$, $H_a(t)$ a função degrau unitário[1] em $t=a$.
   Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $a \in \mathbb{R}^+$,
   $$\mathcal{L}\{H_a(t) f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s), \ \text{para} \ s > s_f$$

[1] Função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases}$, também designada por função de Heaviside (quando $a = 0$).

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

3. (transformada da expansão/contração)
   $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$.
   Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo o $a \in \mathbb{R}^+$,
   $$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ para } s > a\, s_f\,.$$

4. (transformada da convolução)
   O produto de convolução de duas funções f e g, caso o integral exista, define-se como
   $$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau,\ \ t \geq 0\,.$$
   Se f e g são funções ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, e seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$, então
   $$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s),\ \text{ para } s > s_0,$$
   (F e G são as transformadas de Laplace de f e g, respetivamente.)

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

5. (derivada da transformada)
   $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ para } s > s_f.$$
   onde $F^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função F.

6. (transformada da derivada)
   Suponha-se que $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) funções ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$;
   Se $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$, para $s > s_0$, e
   $$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Exemplo

- Cálculo de $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$ usando a transformada da derivada:

Como $\left(\cos^2 t\right)' = -\operatorname{sen}(2t)$, então

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\} &= \mathcal{L}\left\{\left(\cos^2 t\right)'\right\} \\ &= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - \cos^2(0) \\ &= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - 1\,, \qquad \text{para } s > 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$ e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \frac{1}{s}\left(1 - \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}\right) \\ &= \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}\,, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo de aplicação das transformadas de Laplace na resolução dum PVI

Problema de Valor Inicial: Determinar $y = y(t)$ tal que

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada, (admitindo que y(t) tem transformada de Laplace, $Y(s)$)

$$s^2 Y(s) + 2s\, Y(s) + 10\, Y(s) = \mathcal{L}\{1\}. \qquad \text{[Porquê?]}$$

Daqui resulta que

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s}\,,\ i.e., \quad Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0).$$

Falta averiguar que função terá $Y(s)$ como transformada de Laplace.

Transformada de Laplace Inversa

Para terminar a resolução do PVI do slide anterior, falta identificar a função que terá $Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)}$ como transformada de Laplace. Isto é, falta determinar a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$.

Em geral, dada $F(s)$ interessa determinar "a" função f (definida em $\mathbb{R}_0^+$) tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tal f, caso exista, chama-se **transformada de Laplace inversa** de F e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Será esta função única, existirá? Nem sempre existe, mas, caso existam funções nessas condições, a unicidade pode garantir-se escolhendo aquela que é contínua (ver teorema do slide seguinte).

Transformada de Laplace Inversa (unicidade)

Teorema

Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ tais que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{para } s > \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Observação:

Assim, em particular, se $F(s)$ é transformada de Laplace de uma função contínua $f(t)$, esta função é a única função contínua nessas condições (ou seja, a única transformada inversa contínua de F).

Propriedades da Transformada de Laplace Inversa

1. (linearidade da transformada inversa)
   Suponha-se que F e G admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções $F+G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem tansformada inversa e
   (i) $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$;
   (ii) $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

2. (transformada inversa do deslocamento)
   Se F admite transformada de Laplace inversa, então $F(s-\lambda)$ também admite transformada inversa para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e
   $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\, \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

3. (transformada inversa do produto)
   Se F e G admitem transformada de Laplace inversa, então FG também admite transformada inversa e
   $$\mathcal{L}^{-1}\{FG\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} * \mathcal{L}^{-1}\{G\}$$

Exemplos:

1. $$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^3}\right\} &= \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^3}\right\}\ s>2\\ &= \frac{3}{2}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}\\ &= \frac{3}{2}e^{2t}t^2, \qquad t\geq 0\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}\right\}\ s>0\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\\ &= (1*sen)(t) \qquad t\geq 0\\ &= \int_0^t sen(\tau)\,d\tau\\ &= -\cos(t)+1\end{aligned}$$

Voltando ao PVI do slide 15:

ver slide 15

Uma vez que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)} \quad (s>0)\,,$$

a solução do problema pode ser determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\,\frac{s+2}{s^2+2s+10}\right\} \; s>0 \\
&= \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{(s+1)^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{30}\,e^{-t}\,\mathrm{sen}\,(3t), \quad t\geq 0.
\end{aligned}$$