MATEMÁTICA DISCRETA

Tiago Rocha Garcia

tiago.rgarcia@ua.pt

https://tiagorg.pt

2023/2024

Universidade de Aveiro

Índice

Capítulo 1

Lógica de Primeira Ordem e Demonstração Automática

Tópico 1

Interpretação

1.1 Proposição

1.1.1 Definição

São proposições as afirmações que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas mas não ambas.

1.1.2 Exemplos

1. O sol é uma estrela.
2. Deus existe.
3. D. Pedro I foi o primeiro imperador do Brasil.

Afirmações com o seu valor lógico:

1. Para todo o $n \in N$, $2n$ é múltiplo de 2. $\rightarrow$ Proposição **Verdadeira**.
2. Para todo o $n \in Z$, $2n \geq n$. $\rightarrow$ Afirmação **Ambígua**: **Verdadeira** para $n > 0$ e **Falsa** para $n \leq 0$.
3. Para todo o $n \in N$, $3n \geq 4n$. $\rightarrow$ Proposição **False**.

1.1.3 Tipos de Proposições

- **Atómica**: Não pode ser decomposta em proposições mais simples.
- **Composta**: É formada a partir da combinação de proposições atómicas usando conectivos lógicos.

1.2 Conectivos Lógicos

1.2.1 Negação

Símbolo

O símbolo da negação é $\neg$.

Tabela de Verdade

p	$\neg p$
1	0
0	1

1.2.2 Conjunção

Símbolo

O símbolo da conjunção é $\wedge$.

Tabela de Verdade

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2.3 Disjunção

Símbolo

O símbolo da conjunção é $\vee$.

Tabela de Verdade

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.2.4 Implicação

Símbolo

O símbolo da conjunção é $\rightarrow$.

Tabela de Verdade

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

1.2.5 Equivalência

Símbolo

O símbolo da conjunção é $\leftrightarrow$.

Tabela de Verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.2.6 Exemplos

Exemplo 1

Ou o José foi ao supermercado ou está sem ovos em casa.

- ϕ = "O José foi ao supermercado"
- ψ = "O José está sem ovos em casa"

Resultado: $\phi \vee \psi$

Exemplo 2

A Beatriz decidiu emigrar e não tenciona regressar.

- ϕ = "A Beatriz decidiu emigrar"
- ψ = "A Beatriz não tenciona regressar"

Resultado: $\phi \wedge \psi$

Exemplo 3

Ou o meu pai está em casa e a minha mãe não ou o meu pai não está em casa mas a minha mão está.

- ϕ = "O meu pai está em casa"
- ψ = "A minha mão não está em casa"

Resultado: $(\psi \wedge \neg\phi) \vee (\neg\psi \wedge \phi)$

Exemplo 4

Ficarei milionário se ganhar o euromilhões

- ϕ = "Ficar milionário"
- ψ = "Ganhar o euromilhões"

Resultado: $\psi \rightarrow \phi$

1.3 Validade de Fórmulas

1.3.1 Tautologia

Definição

Uma fórmula diz-se **Tautologia** quando tem valor lógico **1** para todas as suas interpretações.
Representa-se com $\top$.

Exemplos

1. $\neg\psi \vee \psi$
2. $(\psi \wedge \phi) \rightarrow \psi$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

1.3.2 Consistente

Definição

Uma fórmula diz-se **Consistente** quando tem valor lógico **1** para alguma das suas interpretações.

1.3.3 Inconsistente ou Contradição

Definição

Uma fórmula diz-se **Inconsistente** ou **Contradição** quando tem valor lógico **0** para todas as suas interpretações.
Representa-se com $\perp$.

Exemplo

1. $\neg\psi \wedge \psi$

1.4 Fórmulas Equivalentes

1.4.1 Definição

As fórmulas ϕ e ψ dizem-se equivalentes quando a fórmula $\phi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Demonstação

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

1.4.2 Exemplos

Equivalências:

1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
2. $p \vee q \equiv q \vee p$
3. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
4. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
5. $p \wedge p \equiv p$
6. $p \vee p \equiv p$
7. $p \wedge \top \equiv p$
8. $p \vee \top \equiv \top$
9. $p \wedge \perp \equiv \perp$
10. $p \vee \perp \equiv p$

Distributividade:

1. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leis de Morgan:

1. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Contraposição e dupla negação:

1. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
2. $p \to q \equiv \neg p \vee q$
3. $\neg\neg p \equiv p$

1.5 Formas Normais

1.5.1 Literais

Definição

Um literal é uma proposição atómica ou a negação de uma proposição atómica.

Exemplos

1. p, q, $\neg r$ são literais.
2. $\neg\neg p$, $p \to q$ não são literais.

1.5.2 Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Uma fórmula está na **Forma Normal Conjuntiva** se é uma conjunção de disjunção de literais.

1.5.3 Forma Normal Disjuntiva (FND)

Uma fórmula está na **Forma Normal Disjuntiva** se é uma disjunção de conjunções de literais.

1.5.4 Exemplos

1. $p \land q \land \neg r$ está na FNC e na FND.
2. $(p \lor \neg q) \land (q \lor r)$ está na FNC.
3. $(p \land \neg q) \lor (q \land r)$ está na FND.
4. $(p \land q) \lor (p \land \neg q) \lor (q \land r)$ não está na FNC nem na FND.

Capítulo 2

Princípios de Enumeração Combinatória

Capítulo 3

Agrupamentos e Identidades Combinatórias

Tiago Garcia
https://tiagorg.pt
tiago.rgarcia@ua.pt

Capítulo 4

Recorrência e Funções Geradoras

Capítulo 5

Elementos de Teoria dos Grafos

Acrónimos